



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**Estabilidad asintótica de una viga de Bresse con
amortiguamiento no lineal, mixto**

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Julio FLORES DIONICIO

ASESOR

María Natividad ZEGARRA GARAY

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Flores, J. (2019). *Estabilidad asintótica de una viga de Bresse con amortiguamiento no lineal, mixto*. Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

CODIGO ORCID DEL AUTOR: 0000-0003-0958-8333

CODIGO ORCID DEL ASESOR:0000-0002-3418-9185

DNI:07591115

**GRUPO DE INVESTIGACIÓN: MODELAMIENTO EN EDP y EDE
CON APLICACIONES NUMÉRICAS**

**INSTITUCIÓN QUE FINANCIA PARCIAL O TOTALMENTE LA
INVESTIGACIÓN:**

**UBICACIÓN GEOGRÁFICA DONDE SE DESARROLLÓ LA
INVESTIGACIÓN. DEBE INCLUIR LOCALIDADES Y
COORDENADAS GEOGRÁFICAS**

Coordenadas geográficas de San Marcos, Perú, en grados y minutos decimales:

- Longitud: 076°44'33.18"
- Latitud: S7°4'43.36"

AÑO O RANGO DE AÑOS QUE LA INVESTIGACIÓN ABARCÓ:

AGOSTO 2019 AGOSTO 2020

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 12.50 horas del día martes cinco de febrero del dos mil diecinueve, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa e integrado por los siguientes miembros, Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino (Jurado Evaluador), Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (Jurado Informante), Mg. Luis Javier Vásquez Serpa (Jurado Evaluador) y la Dra. María Natividad Zegarra Garay como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE UNA VIGA DE BRESSE CON AMORTIGUAMIENTO NO LINEAL, MIXTO» presentada por el Bachiller Julio Flores Dionicio para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

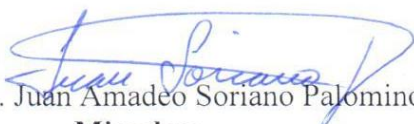
Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Julio Flores Dionicio respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Julio Flores Dionicio aprobado con el calificativo de 18.....


(MUY BUENO)


Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura al Bachiller Julio Flores Dionicio.**

Siendo las 14.00 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.


Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Miembro


Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Presidente


Mg. Luis Javier Vásquez Serpa
Miembro


Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro


Dra. Maria Natividad Zegarra Garay
Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

Flores Dionicio, Julio

Estabilidad Asintótica de una Viga de Bresse con Amortiguamiento no Lineal, Mixto. (Lima) 2019.
V., 76 p., 29.7cm (UNMSM, Maestría, Matemática, 2019) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática Pura I. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

DEDICATORIA

- A Dios todopoderoso y eterno.
- A mi esposa Nérída Ballesteros Meza, por su apoyo, comprensión y paciencia.
- A mis hijos Isabel, Mirian, Javier y Julio Ernesto, por ser ellos el motor de toda mi existencia.

AGRADECIMIENTOS

“Doy gracias a Dios, por iluminar mi mente y haber puesto en mi camino a una gran amiga que de una manera y otra ha contribuido en la realización de esta tesis, me refiero a la doctora María Zegarra Garay asesora en este trabajo de tesis, por su invaluable apoyo incondicional, por la paciencia durante ese tiempo, por tener confianza en mi desde el principio y por la amistad que me brinda. Que Dios te bendiga María. En fin, a todos que de alguna manera u otra contribuyeron para que se haga realidad este trabajo de tesis. Que Dios los bendiga a todos.”

RESUMEN

Estabilidad Asintótica de una Viga de Bresse con Amortiguamiento no Lineal, Mixto

Julio Flores Dionicio
February, 2019

Asesor : Dra. María N. Zegarra Garay.
Título Obtenido : Magister en Matemáticas.

En esta tesis se considera un sistema vibratorio de tipo Bresse, unidimensional de dominio acotado con mecanismos de disipación no lineales localizados actuando en todas las tres ecuaciones de la onda. Se obtienen algunas tasas de decaimiento para las soluciones, sin restricciones sobre los coeficientes, así como no se considera la condición de igualdad de velocidad de propagación de ondas. Un nuevo resultado concerniente a la desigualdad de observabilidad para el sistema conservativo fue también demostrado para obtener la estabilidad asintótica.

Keywords:

Semigrupos no Lineales
Desigualdad de Observabilidad.
Estabilidad Asinttica.
Sistema de Bresse.

ABSTRACT

Asymptotic stability of a Bresse beam with
non-linear mixed damping mixed.

Flores, Julio
February, 2019

Adviser : Dra. María N. Zegarra Garay.
Obtained Title : Master in Mathematics.

“In this thesis we consider a vibrating system of Bresse type, in a one-dimensional bounded domain with nonlinear localized damping acting in all the three wave equations. We obtain some rates of decay for its solutions with no restrictions around the coefficients as well as the condition of equal-speed wave propagation. A new result concerning an observability inequality for the conservative system was also proved in order to reach the asymptotics stability.”

Keywords:

Non Linear Semigroups.

Observability Inequality.

Asymptotic Stability.

Bresse System.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	12
1.1. Formas Sesquilineales	12
1.1.1. El Teorema de Lax-Milgram	13
1.2. Espacios $L^p(\Omega)$	13
1.3. Espacios $W^{1,p}(I)$	16
1.4. Los Espacios $W_0^{1,p}(I)$	17
1.5. Operadores Monótonos	19
1.6. Semigrupos No Lineales	20
1.6.1. Fórmula Exponencial	20
1.6.2. Problema de Cauchy Abstracto	21
2. Existencia-Unicidad-Regularidad	24
2.1. El Modelo y la Técnica de Solución	24
2.1.1. El Buen Planteamiento del Sistema	25
3. Desigualdad de Observabilidad	39
4. Comportamiento Asintótico	61
4.1. Aplicación	73
5. Conclusiones y Trabajos Futuros	76

Introducción

“Las diferentes configuraciones del elemento viga son frecuentemente utilizadas en estructuras civiles, mecánicas, aerospaciales por sus excelentes propiedades de rigidez y resistencia en relación al peso de éstas. En los últimos años se ha visto intensificada la investigación tendiente al desarrollo de modelos teóricos y computacionales, confiables para predecir el comportamiento estructural de los mencionados elementos.

Aunque morfológicamente el puente viga pueda parecer la estructura más simple y directa para atravesar un río, su mecanismo resistente, la flexión, es más compleja y difícil de intuir que el esfuerzo axial, ya sea de tracción o compresión, predominante en otras tipologías estructurales, como los arcos o vigas curvas, motivo del presente estudio.”

Retrocediendo en la historia dado el mérito del tema, se señala que el primer arquitecto conocido en la historia parece ser el eminente egipcio Imhotep (aprox. 2690 - 2610 a. C.) a quien se le atribuye la construcción de la pirámide escalonada de Sakkara en donde los únicos elementos estructurales que aparecen en su construcción son las vigas y columnas; posteriormente se tiene referencia de una única viga curva (arco) construida alrededor de 1500 a.C. en el mismo Egipto.

En Asiria, se encuentran vestigios de lo que pudo haber sido una viga curva.

Teniendo en la antigüedad la Magna Grecia la superioridad en las ciencias, fueron sin embargo, los romanos los que desarrollaron una primigenia ingeniería, como solución para el desplazamiento de sus ejércitos, desarrollaron la habilidad de construir puentes, entre los más famosos, por su longitud, están los puentes de Julio César (55 a. C.), sobre el Rin con 4 m de ancho y una longitud de poco menos de 500 metros en pilotes de madera, en el cual no fueron utilizados clavos, sino cuerdas originando de esta forma un mecanismo de elasticidad mecánica, y el de Trajano (105 d. C.), sobre el Danubio, de casi 1.200 metros construido en arcos de madera.

Los romanos desarrollaron el auténtico arco semicircular de mampostería que usaron ampliamente para sus puentes y acueductos, entre éstos deben mencionarse el “Pont du Gard” en Francia y el “Acueducto de Segovia” en España.



Pont Du Gard en Francia, puente-acueducto romano, siglo I d.C.



Acueducto romano en Segovia, España, siglo II d.C.

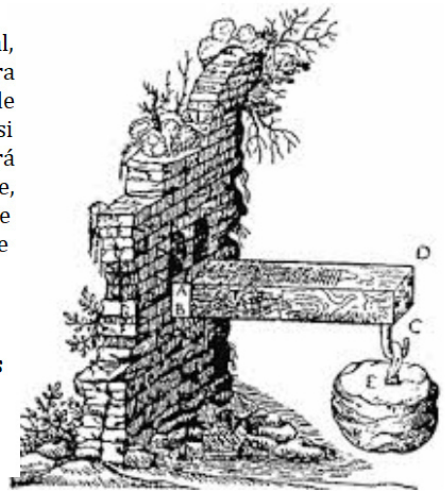
En el “Oscurantismo” de la Edad Media y con el consecuente avance lento de las ciencias, aparece destacándose Leonardo da Vinci (1452-1519) quien comenzara el estudio

mecánico de las vigas, como la resistencia y la flexión de éstas; seguido por Galileo Galilei (1564 -1620) quien agregó a estas teorías, lo que se llamaría más tarde, la mecánica de los materiales; discutió el problema de la viga en voladizo bajo su propio peso y una carga concentrada en el extremo, en su libro, “Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos Nuevas Ciencias”.



"Un prisma o cilindro sólido de cristal, acero, madera, o cualquier otra materia frágil, que sea capaz de sostener un peso muy considerable si se le ata longitudinalmente, se romperá si se le aplica transversalmente, aunque el peso sea sensiblemente menor, y tanto más cuanto más supere su longitud a su grosor"

Proposición I del libro:
"Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias" por Galileo Galilei.



Dibujo de Galileo de una Viga en Voladizo, siglo XII d. C.

Un nuevo aporte surge a la Teoría de vigas con Robert Hooke quien publica en 1678 “De Potentiâ Restitutiva, el cual es un tratado sobre la elasticidad y sus propiedades en los materiales llegando a establecer una relación lineal entre la magnitud de las fuerzas y la deformación que producen; su expresión “ut tensio sic vis” (como la tensión así es la fuerza) es una de las leyes de la mecánica de los materiales que fuera de fuerte influencia en la ingeniería de estructuras del siglo XIX, estos estudios fueron aplicados posteriormente en 1670 por “Mariotte a las fibras de una viga observándose que algunas fibras de la viga se estiraban y otras se acortaban; definió como frontera la profundidad media de la viga, acuñándose el concepto de “eje neutro”.

En la segunda mitad del siglo XVII y la primera del XVIII, la familia Bernoulli contribuyó ampliamente con diversos e importantes aportes a la ciencia, entre ellos el estudio de las vigas. Jacob observó que durante la flexión de una viga elástica hay una sección que permanece plana. Johann, su hermano, enunció, el principio de las “velocidades virtuales”,

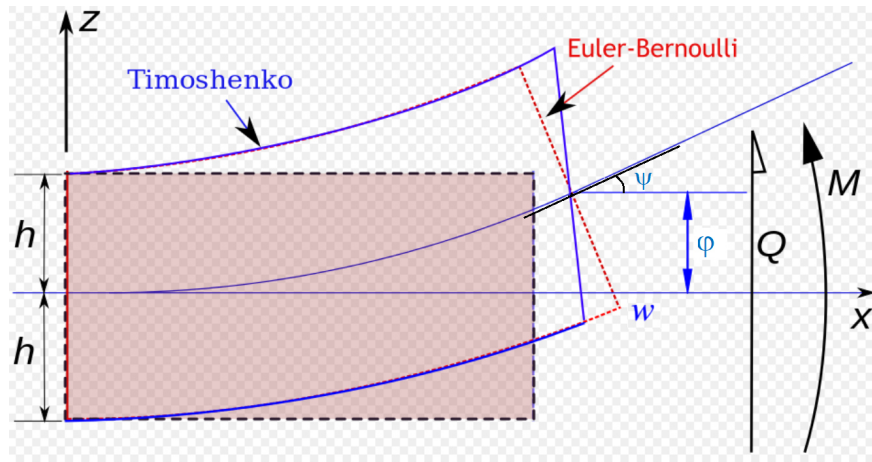
base de los métodos para determinar las deformaciones elásticas de las estructuras. Daniel, su hijo, se interesó por determinar la elasticidad de las barras dobladas, las vibraciones de las vigas y desarrolló la ecuación diferencial para la vibración de una viga.

Coulomb (1736-1806), renombrado físico, puede considerarse, junto con Navier, como uno de los creadores de la Resistencia de materiales. En 1776, publicó el primer análisis correcto de los esfuerzos en una viga con sección rectangular. Aplicó la ley de Hooke, a las fibras, situó la superficie neutra en su posición correcta, desarrolló el equilibrio de las fuerzas en la sección con las fuerzas externas y evaluó correctamente los esfuerzos. Fueron necesarios 135 años desde que Galileo hiciera el primer intento de solucionar el problema.”

Finales del siglo XIX aparece la teoría matemática de la Elasticidad principalmente con los trabajos de Cauchy, entre los que podemos citar, “Sur l’équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues” en el que se introducen los conceptos de tensión y deformación, además presenta de una forma más sencilla la deducción de las ecuaciones fundamentales.

En este punto es necesario mencionar el tratado del matemático y geofísico del Reino Unido A. E. H. Love (1863 - 1940, Oxford), sobre la teoría clásica de la elasticidad “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity”, en 1911 gana el Premio Adams cuando desarrolló un modelo matemático para la propagación de ondas superficiales conocidas como las ondas de Love.

Los estudios de Stephen Timoshenko (1878 - 1972) posteriores al estudio de las vigas de Euler-Bernoulli, establecieron el modelo matemático de las vibraciones transversales de una viga, con una mejora en el modelo clásico planteado por Euler-Bernoulli, pues consideró el efecto de deformación de corte, por acción de fuerzas externas, al considerar la corrección frente a la fuerza cortante como cuatro veces más importante debido a la inercia de rotación en comparación con el modelo de sus predecesores.



Desplazamiento de una viga de Euler-Bernoulli (rojo) vs. Timoshenko (azul)

“Consideraciones del Movimiento de una Viga de Timoshenko

- El material de la viga debe ser homogéneo, lineal elástico y sus propiedades mecánicas y térmicas deben ser las mismas en todas las direcciones, i.e.: isotrópico.
- El desplazamiento longitudinal w en dirección del eje de la viga es nulo.
- El desplazamiento normal ϕ de los puntos sobre la sección transversal del elemento en una posición x , son pequeños e iguales a los desplazamientos del eje de la viga.
- La sección transversal del elemento en una posición x normal al eje de la viga antes de la deformación, permanece plana pero no necesariamente ortogonal al eje del elemento después de la deformación, lo que supone la presencia de un estado de tensiones cortantes ψ en la sección de la viga.

”



Respecto al estudio de las vigas curvas diferentes estudios se sucedieron hasta que en 1854, el ingeniero francés Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883) publicó su libro “Recherches Analytiques sur la Flexion et la Résistance de Pieces Courbés” en el que presentaba métodos prácticos para el análisis de vigas curvas y arcos.

“La viga curva en flexión constituye un importante elemento estructural de ingeniería, por sus diferentes usos y aplicaciones; la demanda por sistemas con alta velocidad, de bajo costo y bajo consumo de energía han motivado a introducir partes flexibles en muchos sistemas mecánicos, tales como estructuras de rotores flexibles, estructuras aéreas como hélices, ventiladores, turbinas y subsistemas de estructuras más complejas pueden ser modelados como vigas curvas, así como en la construcción de puentes.

Un primer abordaje para entender a este elemento es analizar evidentemente la flexión de la misma. Se sabe que la flexión simple dada por la expresión

$$\sigma = M/W \quad (1)$$

arroja buenos resultados, en el caso de vigas rectas cargadas simétricamente en flexión pura, ya para vigas rectas cargadas por corte, esto es, cuando las cargas atraviesan por el centro de corte y la longitud es mucho más grande que la altura de la viga, la expresión (1) arroja un error mínimo, el cual no se considera relevante. Cuando se tienen vigas curvas con la condición que el radio de curvatura sea mayor que 5 veces la altura de la viga, (1) arroja resultados viables, en cambio si el radio de curvatura es casi como la altura de la viga-curva se tienen resultados poco o nada correctos. Este es el motivo que para grandes valores de curvatura se busque una solución aceptable aunque aproximada, según el caso. “Para encontrar la distribución del esfuerzo de un elemento curvo en flexión se tienen las siguientes consideraciones:

1. La sección transversal tiene un eje de simetría en un plano a lo largo de la longitud de la viga.
2. Las secciones transversales planas permanecen planas después de la flexión.
3. El módulo de elasticidad es igual en tracción que en compresión.
4. El eje neutro y el eje centroidal de una viga curva, no coinciden y el esfuerzo no varía en forma lineal como en una viga recta.
5. La tensión radial σ_r como tensión de corte τ son suficientemente pequeñas para poder considerar al problema como unidimensional, ver figura (1b).

La fórmula para las tensiones normales circunferenciales σ_θ luego de estas consideraciones se denomina “fórmula para vigas curvas en flexión.”

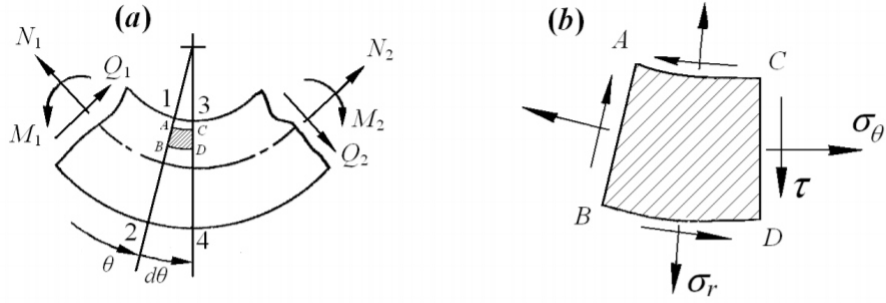


Figura 1: Equilibrio de un elemento de viga curva

En la figura (2a) se considera un elemento infinitesimal de viga definido por los puntos 1, 2, 3 y 4. Las cargas exteriores producen en la sección considerada, esfuerzos flexionales, cortantes y normales que deben equilibrarse por tensiones normales σ_θ y de corte τ . Hay que tener presente que se consideran secciones simétricas y cargas actuando en el plano de simetría, por lo tanto no hay torsión.

Las tensiones de corte producen alabeo de la sección plana y modifican levemente la tensión σ_θ . Es usual despreciar el efecto del corte τ salvo en el caso de vigas con alma muy delgada.”

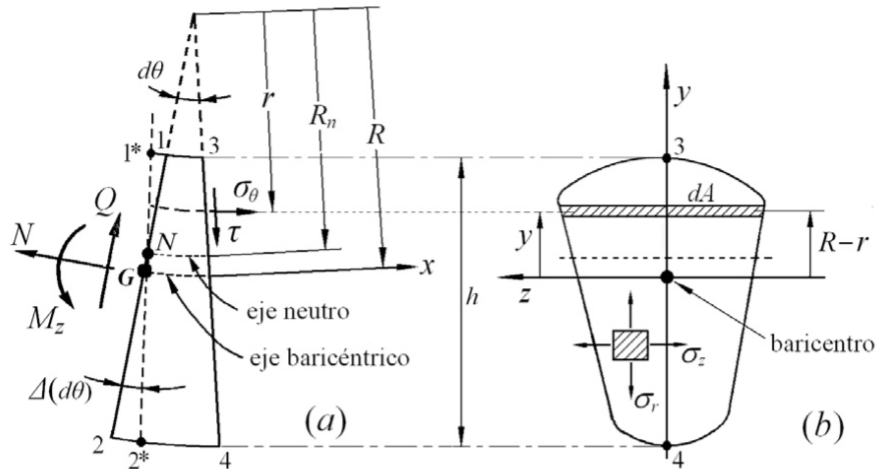


Figura 2: Elemento infinitesimal de viga curva

La teoría que se trata en el presente trabajo es la teoría de vigas curvas de Bresse, este sistema es descrito a través de sus ecuaciones de movimiento, donde las hipótesis básicas

son las siguientes:

Ecuaciones de Movimiento: Sean ρ la densidad del material, A el área de la sección, Q , N y M son las relaciones de tensión deformación del comportamiento elástico transversal R el radio de curvatura, I es el momento de inercia de la sección transversal, φ es el desplazamiento transversal, ψ es la rotación de las secciones transversales, w es el desplazamiento longitudinal y F_1 , F_2 y F_3 son las fuerzas externas.

$$\rho A \varphi_{tt} = Q_x + R^{-1} N$$

$$\rho I \psi_{tt} = M_x - Q$$

$$\rho A w_{tt} = N_x - R^{-1} Q$$

Ecuaciones de Tensión-deformación: Sean ϵ , γ y \hat{k} las relaciones de la tensión-deformación,

$$\epsilon = w_x - R^{-1} \varphi$$

$$\gamma = \varphi_x + R^{-1} w + \psi$$

$$\hat{k} = \psi_x$$

” Ecuaciones Elásticas Constitutivas: “Sean E el módulo de elasticidad, G el módulo de cisayamiento, \hat{k} el factor de cisayamiento y $k = \hat{k}AG$,

$$N = EA\epsilon$$

$$Q = kGA\gamma$$

$$M = EI\hat{k}$$

” Ahora, de las ecuaciones anteriores haciendo las sustituciones pertinentes se llega a:“

$$\begin{aligned} \rho A \varphi_{tt} - kGA(\varphi_x + \psi + R^{-1}w)_x - AER^{-1}(w_x - R^{-1}\varphi) &= F_1 \\ \rho I \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + kAG(\varphi_x + \psi + R^{-1}w) &= F_2 \\ \rho A w_{tt} - EA(w_x - R^{-1}\varphi)_x + kAGR^{-1}(\varphi_x + \psi + R^{-1}w) &= F_3 \end{aligned} \tag{2}$$

Luego considerando: $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k_0 = EA$, $b = EI$ e $l = R^{-1}$ se llega a la expresión clásica del sistema de Bresse, el cual es el motivo de este estudio, ver [14].”

El problema troncal de todos estos estudios se reduce a analizar problemas de estabilidad, para este propósito la herramienta de las ecuaciones diferenciales parciales viabiliza

el análisis de esta estructura física, a partir del estudio de la existencia, unicidad y comportamiento asintótico de las soluciones.

Si se consideran las vibraciones como oscilaciones localizadas en una viga curva, el modelo viene dado por las siguientes ecuaciones, derivadas de la expresión (2) como fuera visto, “

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - l\varphi) + \alpha_1(x)g_1(\varphi_t) = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_3(x)g_3(w_t) = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, T) \end{array} \right. \\
 & \text{con las condiciones iniciales y de frontera:} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1; \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1; \\ w(\cdot, 0) = w_0, w_t(\cdot, 0) = w_1; \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde las variables denotan,

φ : desplazamiento transversal o vertical.

ψ : rotación de las secciones transversales.

w : desplazamiento longitudinal.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: funciones de localización.

g_1, g_2, g_3 : funciones continuas y monótonas.

$\rho_1, \rho_2, b, l, \kappa_0, \kappa$: constantes positivas.”

En este modelo disipativo, se observa que los términos de disipación son no lineales en las tres ecuaciones y de tipo localizados, por efecto de las funciones α_i , asegurando con estos mecanismos, estabilizar el sistema, en este sentido las no linealidades al no ser por ejemplo, de tipo Lipschitz, obliga a aplicar la teoría de semigrupos no lineales, se consideran a las funciones no lineales g_i , continuas y monótonas.

La bibliografía usada para demostrar la existencia y unicidad es tomada de los libros de Brezis [3], Barbu [1] y Gómez [11]. Para el análisis del comportamiento asintótico, el trabajo se centra en obtener algunas tasas de decaimiento para las soluciones, sin considerar restricciones sobre los coeficientes y ni la igualdad de velocidad de propagación de ondas, para resolver esto se utiliza el método de Lasiecka y Tataru ([16]) en el cual se introduce una cierta función S , que se verá más adelante, que forma parte de una ecuación diferen-

cial ordinaria (EDO), y es ésta función la que establece el tipo de tasa de decaimiento de las soluciones, tal función depende de la solución de la EDO. El hecho de considerar condiciones de tipo Dirichlet, lleva a hacer estimativas, más finas, por falta de datos en la frontera, de mayor regularidad, este problema lleva a considerar una desigualdad de observabilidad que será elemento clave para estimar los términos que llevan a mostrar las tasas de decaimiento de las soluciones.

Por otra parte son diversos los estudios antecedentes a éste, por ejemplo se pueden citar a los autores J. Soriano, J. Rivera, L. Fatori [20], quienes introducen en el sistema un amortecimiento indefinido en la ecuación de rotación del ángulo, consiguiendo estabilidad de tipo exponencial. También es abordado el sistema de Bresse, pero con coeficientes variables, e incluyendo un control interno en las tres ecuaciones, por los autores J. Soriano y R. Schulz, [21]., los que encuentran usando el método de unicidad de Hilbert (HUM) la controlabilidad exacta del sistema.

Zhuangyi Liu y Bopeng Rao [17], estudian el sistema de Bresse termoelástico; las dos ecuaciones de onda sobre el desplazamiento longitudinal y el desplazamiento del ángulo de corte están efectivamente amortiguadas por la disipación de las dos ecuaciones de transferencia de calor, se hallan en estas condiciones, decaimiento exponencial. Ya, cuando la tercera ecuación del desplazamiento vertical presenta amortiguamiento débil, éste impide encontrar una tasa de descomposición de la energía del sistema. Sin embargo muestran decaimiento exponencial cuando la velocidad de onda del desplazamiento vertical coincide con la velocidad de onda del desplazamiento longitudinal o del desplazamiento del ángulo de corte.

W. Charles, J. Soriano, F. Falcão y J. Rodrigues trabajan con el sistema considerando mecanismos de amortiguamiento localizados no lineales en las tres ecuaciones, obtienen tasas de decaimiento sin la restricción de la condición de igualdad entre las velocidades de propagación de ondas:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}, \quad k = k_0$$

las que limitan el análisis al aspecto meramente teórico. “El trabajo aquí presentado es una detallada exposición del artículo [7], culminándose con una aplicación del teorema de estabilidad.”

La estructura del trabajo se presenta en cuatro capítulos a seguir.

En el primer capítulo se exhiben las herramientas que se usarán en el desenvolvimiento del mismo, como son los teoremas, en especial el teorema de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones, enmarcado en la teoría de semigrupos no lineales, así como las propiedades y definiciones adyacentes a esta teoría. También se mencionan resultados del análisis funcional involucrados en el tema. Se desea con estos preliminares dejar un estudio autocontenido de la presente tesis.

En el segundo capítulo usando el teorema enunciado en Brézis [3], se muestra la existencia, unicidad y regularidad de la solución.

En el tercer capítulo debido a la importancia y complejidad de su contenido, se presenta en forma aislada la desigualdad de observabilidad interna, la cual será la esencial premisa para el análisis del comportamiento asintótico, en el subsiguiente capítulo.

Finalmente, en el cuarto capítulo se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones exhibiéndose deseadas tasas de decaimiento. Y como una pequeña contribución se desenvuelve un ejemplo aplicativo en el cual se encuentra estabilidad asintótica del tipo exponencial, se verifica el resultado usando el teorema de estabilidad dado por Lasiecka y Tataru.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Formas Sesquilineales

Definición 1.1.1. “Sean X e Y dos espacios \mathbb{K} -vectoriales. Una aplicación $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ es llamada de forma sesquilineal en $X \times Y$ si se verifica:

1. $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \quad \forall x, y \in X \text{ y } \forall z \in Y.$
2. $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \quad \forall x \in X \text{ y } \forall y, z \in Y.$
3. $a(\alpha x, y) = \alpha a(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{K}.$
4. $a(x, \alpha y) = \bar{\alpha} a(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

Cuando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ a se llama forma bilineal.

Definición 1.1.2. Sean X y Y dos espacios vectoriales normados y $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ una forma sesquilineal. Se dice que a es

1. *coerciva*, cuando existe una constante $C > 0$ tal que $\operatorname{Re}(a(x, x)) \geq C\|x\|_X^2$, para todo $x \in X$.
2. *continua (acotada)*, cuando existe una constante $c > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.
3. *hermitiana*, cuando $a(x, y) = \overline{a(y, x)}$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Definición 1.1.3. Sean X un \mathbb{K} -espacio vectorial, una forma sesquilineal hermitiana $a : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ es llamada de producto interno en X si se verifica:

1. $a(x, x) \geq 0, \forall x \in X;$

2. $a(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Se denota un producto interno en X por $(\cdot, \cdot)_X$

Definición 1.1.4. Sean X un espacio vectorial y $(\cdot, \cdot)_X$ un producto interno en X . La función $\|\cdot\|_X = (\cdot, \cdot)_X^{1/2}$, define una norma en X . Esta norma es llamada de norma inducida por el producto interno $(\cdot, \cdot)_X$.

Un espacio de Banach $(H, \|\cdot\|_H)$ es llamado de espacio de Hilbert cuando la norma $\|\cdot\|$ es proveniente de un producto interno en H .

Definición 1.1.5. Todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Demostración: Ver [13]. ■

1.1.1. El Teorema de Lax-Milgram

Teorema 1.1. [Teorema de Lax-Milgram] Sean H un espacio de Hilbert real (complejo) y “ $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ una forma bilineal (sesquilineal) continua y coerciva. Entonces, para todo f linear (antilinear) y acotado, existe un único $x \in H$ tal que $a(x, y) = \langle f, y \rangle, \forall y \in H$.

Demostración: Ver [2]. ■

1.2. Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 1.2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $0 < p < \infty$. Sea $\mathcal{L}^p(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones medibles “ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f|^p$ es integrable (en el sentido de Lebesgue) en Ω , i.e.:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Se dice que dos funciones $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ son equivalentes si $f = g$ casi siempre en Ω .

Se denota

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) \setminus \sim$$

Para $p = \infty$ se define

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es acotada casi siempre (c.s) en } \Omega\}$$

Se denota por $L_{loc}^p(\Omega)$ donde $1 \leq p \leq \infty$ y se define,

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible: } f \in L^p(K) \text{ para cada subconjunto compacto } K \subset \Omega$$

”

Proposición 1.2.1. “

- Si $0 < p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.
- El conjunto $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.
- Si $f \in L^p(\Omega)$ se definen las siguientes normas:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 < p \leq \infty$$

y para $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf \{k > 0; |f(x)| \leq k \text{ c.s. en } \Omega\}$$

Demostración: Ver [2].

■

Definición 1.2.2. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se dice que un número real q es exponente conjugado de p cuando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $p \in (1, \infty)$, $q = \infty$ si $p = 1$ y $q = 1$ si $p = \infty$.

Lema 1.2.1. Si $1 \leq p < \infty$ y $a, b > 0$, entonces $a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Demostración: Ver [4].

■

Lema 1.2.2. Dados $a, b \geq 0$; $1 < p, q < \infty$ conjugados y $\epsilon > 0$, entonces

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q$$

Demostración: Ver [8].”

■

“

Proposición 1.2.2. [Desigualdad de Hölder] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y sean p y q exponentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración: Ver [2]. ■

Proposición 1.2.3. [Desigualdad de Minkowski] Sean $f, g \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración: Ver [8]. ■

Definición 1.2.3. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El soporte de φ es el conjunto

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega$$

Se denota $C_0(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \text{ es compacto}\}$.

Teorema 1.2.1. [De La Representación de Riesz-Frchet] Sea H un espacio de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe un único $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v), \quad \forall v \in H$$

Además

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}$$

.

Demostración: Ver [2] ■

Teorema 1.2.2. [Convergencia Dominada de Lebesgue] Si una sucesión f_k de funciones integrables a Lebesgue en un conjunto Ω converge c.s. en Ω para una función f , y si $|f_k| < g$ c.s. en Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$ para alguna función $g \in L^1(\Omega)$, entonces la integral $\int_\Omega f$ existe y se verifica,

$$\int_\Omega f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k dx$$

Demostración: Ver [8]. ■

Lema 1.2.3. [Lema de Gronwall] Sean $u \in L^\infty(0, T)$ y $\varphi \in L^1(0, T)$ tal que $u(x) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ y sea $c \geq 0$ una constante. Si

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t u(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Entonces

$$\varphi(t) \leq ce^{\int_0^t u(s)ds} \quad \forall t \in [0, T].$$

Demostración: Ver ([4])“ ■

Lema 1.2.4. [De Lions-Aubin] “Sean B_0, B, B_1 espacios de Banach y B_0, B_1 reflexivos tales que $B_0 \xrightarrow{comp} B \xrightarrow{cont} B_1$. Se define

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

donde $1 < p_0, p_1 < \infty$. Se considera W junto a la norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u_t\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$$

un espacio de Banach. Entonces la inmersión de W en $L^{p_0}(0, T; B)$ es compacta.

Demostración: Ver [4] ■

1.3. Espacios $W^{1,p}(I)$

Considere el intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y sea $p \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.3.1. Se define el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ como,

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I), \text{ tal que } \int_I u\varphi' = - \int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I)\}$$

En particular, se denota

$$H^1(I) := W^{1,2}(I)$$

Sea $u \in W^{1,p}(I)$ a la función g en las condiciones de la definición se le llama derivada débil de u y se le denota $g = u'$.” A las funciones φ se les suele llamar funciones test o funciones de prueba.

Proposición 1.3.1. *Se define:*

1. “El espacio $W^{1,p}(I)$ es un espacio vectorial normado junto a la norma (usual),

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I), \quad 1 \leq p \leq \infty$$

2. Además, si $1 < p < \infty$, entonces se puede definir la norma

$$\|u\|_p = (\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p)^{1/p}$$

en $W^{1,p}(I)$ la cual es equivalente a la norma usual.

3. El espacio $H^1(I)$ es un espacio vectorial con producto interno y norma definidos, respectivamente por,

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u_x, v_x)_{L^2} = \int_I u \bar{v} dx + \int_I u_x \bar{v}_x dx, \quad \forall u, v \in H^1(I)$$

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_I |u|^2 dx + \int_I |u_x|^2 dx \right)^{1/2} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

”

Demostración: Se siguen de las propiedades de norma y producto interno. ■

Lema 1.3.1. *Sea I un intervalo ilimitado y sea $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

Demostración: Ver [2] ■

1.4. Los Espacios $W_0^{1,p}(I)$

Definición 1.4.1. “Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio $W_0^{1,p}(I)$ se define como

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{1,p}}$$

Si $p = 2$ se tiene,

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$$

Una caracterización para $W_0^{1,p}(I)$ es,

$$W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{1,p}(I) : u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial I\}$$

Si $p = 2$ se tiene,

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1(I) : u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial I\}.$$

Teorema 1.4.1. [Desigualdad de Poincaré] Sea I un intervalo limitado. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

Demostración: Ver [2]. ■

De esta desigualdad se sigue que $\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}$ define una norma equivalente en $W_0^{1,p}(I)$ y además se prueba que $C = |I|$.

Lema 1.4.1. Sea $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

entonces $u = 0$ c.s. en Ω .

Demostración: Ver [4]. ■

En este capítulo, X será considerado un espacio de Hilbert, salvo mención expresa.”

Definición 1.4.2. Se define un operador con un dominio en un conjunto X e imagen en un conjunto Y , a toda relación A de X en Y , es decir, a todo y cualquier subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$.

Definición 1.4.3. El operador A es acotado si transforma conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de X' , esto es:

Para todo $u \in X$ tal que $\|u\|_X \leq k_1$, para algún $k_1 > 0$, se tiene

$$\|Au\|_{X'} \leq k_2$$

1.5. Operadores Monótonos

Definición 1.5.1. *Un operador unívoco A de X se dice positivo si se verifica,*

$$(Ax, x)_X \geq 0, \forall x \in X$$

Definición 1.5.2. *Sea $A : X \rightarrow X$, operador unívoco, se dice que es monótono si:*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X$$

Se observa que si A es un operador unívoco y lineal en un espacio de Hilbert entonces A es monótono si y solamente si, A es positivo.

Definición 1.5.3. *Un operador A es maximal monótono si no admite una extensión monótona propia, esto es si A no está propiamente contenido en algún otro subconjunto monótono.*

Teorema 1.5.1. *Sea A operador monótono de X . Son equivalentes:*

- (a) A es maximal monótono
- (b) A es monótono y $R(I + A) = X$
- (c) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1} : X \rightarrow X$ es una contracción.

Demostración: Ver [13] ■

Definición 1.5.4. *Un operador $B : X \rightarrow X'$ se dice hemicontínuo si es unívoco y además uniformemente en X' cuando $t \rightarrow 0$.*

Observación 1.5.1. *Seja $w \in \mathbb{R}$. Se denota por $\mathcal{A}(w)$ a la clase de operadores $A : X \rightarrow X$ tal que $A + wI$ es acretivo. Por lo tanto $\mathcal{A}(0)$ es la clase de operadores acretivos.*

Sea el plano

$$\Gamma = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \sum_{i=1}^n a_i x_i + bt = c \right\}$$

donde a_i, b y c son constantes arbitrarias. El polinomio característico $P(a_1, \dots, a_n, b)$ asociado al operador diferencial $P(x, D) = D_t^2 - \Delta$ es definido por

$$P(a_1, \dots, a_n, b) = b^2 - \sum_{i=1}^n n|a_i|^2,$$

y por tanto, Γ es característico de $P(x, D)$, si y solo si $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = b^2$.

Teorema 1.5.2. [De Holmgren]. Sean \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 dos abiertos convexos de \mathbb{R}^m tal que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ y sea $P(D)$ un operador diferencial con coeficientes constantes, tal que todo plano Λ característico de $P(D)$ que verifica $\Lambda \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ satisface también $\Lambda \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Entonces cualquier solución $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ de la ecuación $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ en \mathcal{O}_1 verifica $u = 0$ en \mathcal{O}_2

Demostración: Ver [4] ■

1.6. Semigrupos No Lineales

Definición 1.6.1. Sean X un espacio de Banach y $C \subseteq X$. Se dice que una función S de $[0, \infty)$ en la familia de aplicaciones de C en C es un semigrupo sobre C si:

(i) $S(0) = I$,

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $t, s \geq 0$

Decimos que S es continuo si

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$, $\forall x \in C$;

y que S es de tipo w si

(iv) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{wt}\|x - y\|$.

“Cuando $w \leq 0$ decimos que S es un semigrupo de contracciones. Escribiremos $S \in Q_w(C)$ si S fuera un semigrupo continuo de tipo w sobre C .”

1.6.1. Fórmula Exponencial

Así como en el caso de los semigrupos lineales, podemos definir la exponencial de un operador bajo ciertas hipótesis:

Teorema 1.2. (Fórmula Exponencial). Sea X un espacio de Banach y el operador $A : X \rightarrow X$

disipativo tal que $\overline{D(A)} \subset \text{Im}(I + \lambda A)$, para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeño. Entonces, para cada $x \in D(A)$ y $t > 0$, existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-n}x$$

uniformemente en t , sobre todo intervalo compacto de $[0, \infty[$. Denotamos

$$S(t)x := \lim_{n \rightarrow \infty} (I + \frac{t}{n}A)^{-n}x$$

tenemos que $S \in Q_\omega(\overline{D(A)})$, esto es $S(t)$ es un semigrupo de contracciones sobre $(\overline{D(A)})$.

Demostración : Ver [11] en la bibliografía.

Teorema 1.3. Sea $(\epsilon_n)_n$ una sucesión en \mathbb{R}^+ tal que $\epsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, $[\frac{t}{\epsilon_n}]$ parte entera de $\frac{t}{\epsilon_n}$ y A un operador que satisface las hipótesis del teorema (1.2). Entonces $\forall x \in \overline{D(A)}$ tenemos que

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + \epsilon_n A)^{-[\frac{t}{\epsilon_n}]}x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + \epsilon_n A)^{-[\frac{t}{\epsilon_n}] - 1}x$$

uniformemente en intervalos acotados.

Observación 1.1. De forma más general, si (ϵ_n) es una sucesión de números no negativos tal que $\epsilon_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, (k_n) una sucesión de enteros no negativos tal que $k_n \epsilon_n \rightarrow t$ y A es un operador satisfaciendo las condiciones del teorema (1.2), entonces

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + \epsilon_n A)^{-k_n}x, \forall x \in \overline{D(A)}$$

Proposición 1.6.1. Si $x \in D(A)$ y $0 \leq \tau \leq t$ verificándose las hipótesis del teorema (1.2) se tiene

$$||S(t)x - S(\tau)x|| = e^{w^+(t-\tau)} e^{w\tau} (t - \tau) |Ax|$$

donde $w^+ = \max\{w, 0\}$

Definición 1.6.2. El semigrupo asociado a $A \in \mathcal{A}(\omega)$ por el Teorema (1.2) será llamado semigrupo generado por $-A$ y $-A$ es el generador exponencial de S .

1.6.2. Problema de Cauchy Abstracto

“Sea X un espacio de Banach, $A : X \rightarrow X$ un operador y considere el siguiente Problema de Cauchy Abstracto,

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} + AU \ni 0 \\ U(0) = U_0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Definición 1.6.3. Una función $U : [0; \infty) \rightarrow X$, $U_0 \in D(A)$ que satisfice

$$\begin{aligned} (i) \quad & U(t) \in D(A) \text{ para casi todo } t \in (0; \infty); \\ (ii) \quad & U(t) \text{ es lipschitziana en } [0; \infty) \\ (iv) \quad & -\frac{dU}{dt}(t) \in AU(t) \text{ para casi todo } t \in (0; \infty) \end{aligned} \tag{1.2}$$

decimos que U es una solución fuerte de (1.1)

Teorema 1.6.1. Sea X un espacio de Banach y A un operador maximal monótono de X . Para todo $U_0 \in D(A)$ existe una única función $U(t) : [0; \infty[\rightarrow X$, tal que

- $U(t) \in D(A); \forall t \geq 0$
- $U(t)$ es lipschitziana en $[0; \infty[$, esto es, $\frac{dU}{dt} \in L^\infty(0, \infty; X)$
- $U(t)$ satisface el problema de Cauchy abstracto

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} + AU \ni 0 \\ U(0) = U_0 \end{array} \right.$$

Demostración: Ver en [3].

”

■

Corolario 1.6.1. Sea X reflexivo y B un operador monótono, hemicontínuo y acotado de X en X^* , Sea A un operador maximal monótono en $X \times X^*$. Entonces $A + B$ es maximal monótono.

Demostración: Ver en [1].

■

Observación 1.6.1. En particular, se tiene que cualquier operador monótono, hemicontínuo y acotado de X en X es maximal monótono en $X \times X^*$.

Corolario 1.6.2. Sea X un espacio de Banach real y B operador de X en X continuo y disipativo. Entonces para cada $U_0 \in X$ existe una única función $U \in C^1(0, \infty; X)$ que satisfice

“

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dU}{dt}(t) = BU(t), \quad t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

llamada solución débil de (1.3).”

Capítulo 2

Existencia-Unicidad-Regularidad

2.1. El Modelo y la Técnica de Solución

“Se considera para el presente estudio de este capítulo el sistema disipativo de Bresse, con disipaciones localizadas no lineales en las tres ecuaciones; tal sistema viene dado por las siguientes ecuaciones acopladas de movimiento.

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - l\varphi) + \alpha_1(x)g_1(\varphi_t) = 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$\rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_3(x)g_3(w_t) = 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, T) \quad (2.3)$$

Nuestro sistema estará sujeto a las siguientes condiciones de frontera de tipo Dirichlet,

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0 \quad (2.4)$$

y condiciones iniciales,

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1; \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1; w(\cdot, 0) = w_0, w_t(\cdot, 0) = w_1 \quad (2.5)$$

donde las variables denotan,

φ : desplazamiento transversal o vertical.

ψ : rotación de las secciones transversales.

w : desplazamiento longitudinal.

$\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$: funciones de localización

g_1, g_2, g_3 : funciones continuas y monótonas

$\rho_1, \rho_2, b, l, \kappa_0, \kappa$: constantes positivas.”

Se consideran algunas restricciones convenientes, a fin de obtener el buen planteamiento y la estabilidad asintótica de las soluciones, que se desean, como son:

- (i) La función $g_i, i = 1, 2, 3$, es continua, monótona creciente y $g_i(s)s > 0$ para $s \neq 0$.
- (ii) Las constantes positivas κ_i y K_i verifican $\kappa_i \leq K_i$ y $\kappa_i s \leq g_i(s) \leq K_i s, i = 1, 2, 3$ para $|s| > 1$.
- (iii) Las funciones $\alpha_i \in L^\infty(0, L)$ no-negativas verifican:

$$\alpha_i(x) \geq \alpha_i > 0 \quad c.s. \quad \text{en} \quad I_i \text{ (intervalos abiertos), } i = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad I := \bigcap_{i=1}^3 I_i \neq \emptyset \quad (2.6)$$

Observación 2.1.1. *Se resalta que las funciones de localización permiten considerar mecanismos de amortecimiento, actuando en una pequeña región arbitraria de la viga.*

A seguir se enuncia el Teorema de Existencia y Unicidad de la solución del sistema (2.1)-(2.5), aplicado a un Problema equivalente a éste, al que se llamará de Problema de Cauchy o de Valor Inicial; la demostración de este teorema lleva a seguir una técnica de resolución. El lector familiarizado con la técnica de semigrupos lineales, encontrará la similitud con la aplicación del Teorema de Hille Yosida cuando en éste, se considera la matriz asociada al sistema como siendo lineal, caso que no es el nuestro, como se verá más adelante, al tener a la matriz \mathcal{A} asociada al sistema (2.1)-(2.5) como no lineal, debido a la presencia de términos no lineales en el sistema original.

2.1.1. El Buen Planteamiento del Sistema

Como punto de partida, se establece el espacio X , con este propósito se calcula primero la energía asociada al sistema.

1. La Energía.

Proposición 2.1.1. “La energía asociada al sistema (2.1)-(2.5), se describe como el funcional,

$E(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definido por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b \psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2 dx \quad (2.7)$$

Demostración: Multiplicando formalmente la ecuación (2.1) por φ_t e integrando por partes se obtiene,

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \varphi_{tx} dx - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \varphi_t dx = - \int_0^L \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t dx \quad (2.8)$$

En (2.2) multiplicando ψ_t e integrando por partes se obtiene,

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2 + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \psi_t dx = - \int_0^L g_2(\psi_t) \psi_t dx \quad (2.9)$$

en la ecuación (2.3) multiplicando por w_t e integrando por partes se obtiene,

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L w_t^2 dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) w_{tx} dx + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w_t dx = - \int_0^L \gamma(x) g_3(w_t) w_t dx \quad (2.10)$$

sumando (2.8), (2.9) y (2.10) se tiene,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b \psi_x^2) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L k_0(w_x - l\varphi)^2 dx \\ &= - \int_0^L \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t dx - \int_0^L g_2(\psi_t) \psi_t dx - \int_0^L \gamma(x) g_3(w_t) w_t dx \end{aligned}$$

reordenando

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b \psi_x^2) + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2 dx \right] \\ &= - \int_0^L \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t + g_2(\psi_t) \psi_t + \gamma(x) g_3(w_t) w_t dx \end{aligned}$$

“Definimos como la energía asociada al sistema, a la primera integral de la igualdad anterior, i.e.,

$$E(t) = \int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b \psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2 dx'' \quad (2.11)$$

luego

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t + g_2(\psi_t) \psi_t + \gamma(x) g(w_t) w_t dx''$$

Siendo la expresión de la derecha negativa, debido a las condiciones dadas en (2.6), se concluye que el sistema es disipativo. ■

Observación 2.1.2. *Los cálculos anteriores han sido formales, puesto que aún no se demostró la existencia ni la regularidad de la solución.*

Observación 2.1.3. *Si se consideran nulos los términos de disipación en el sistema (2.1)-(2.5), que se estudia, se obtiene el modelo conservativo, “a saber,*

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - l\varphi) &= 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) &= 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_3 w_{tt} - \kappa_0(w_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) &= 0 \quad \text{en } (0, L) \times (0, T) \end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde se observa que la energía para este modelo es la misma dada en (2.7) y en este caso se verifica,

$$E(t) = E(0) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.13)$$

” Esta observación será de gran utilidad más adelante, cuando se estudie la desigualdad de observabilidad.

2. El Espacio de Fase

De la expresión de la energía dada en (2.11) se observa que, para establecer su buena definición, deben cumplirse las siguientes regularidades,

$$\varphi \in H_0^1(0, L) ; \varphi_t \in L^2(0, L) ; \psi \in H_0^1(0, L) ; \psi_t \in L^2(0, L) ; w \in H_0^1(0, L) ; w_t \in L^2(0, L).$$

Luego, formalmente, la solución $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)$ del sistema (2.1)-(2.5) pertenece al llamado espacio de fase, dado por,

$$X = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L).'' \quad (2.14)$$

3. El Producto Interno y la Norma del Espacio X

Con la finalidad de no recargar la notación, se denotará φ_t por Φ , ψ_t por Ψ y w_t por W .

Sean $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W), (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\omega}, \hat{W}) \in X$, se define el producto interno en el espacio de fase X como siendo,

$$\begin{aligned} \left\langle (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W), (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\omega}, \hat{W}) \right\rangle_X &= \rho_1 \int_0^L \Phi \hat{\Phi} dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \hat{\Psi} dx + \rho_1 \int_0^L W \hat{W} dx \\ &+ b \int_0^L \psi_x \hat{\psi}_x dx + \kappa_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)(\hat{w}_x - l\hat{\varphi}) dx \\ &+ \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)(\hat{\varphi}_x + \hat{\psi} + l\hat{w}) dx \end{aligned} \quad (2.15)$$

“

El espacio X, equipado con este producto interno que fue definido a partir de la energía, es un espacio de Hilbert, en el cual también se puede precisar su norma como siendo, “

$$\begin{aligned} \|U\|_X^2 &= \|(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)\|_X^2 \\ &= \int_0^L \rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + \rho_1 |W|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa_0 |w_x - l\varphi|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \end{aligned}$$

para todo $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W) \in X$.

(2.16)

”

Más adelante, se usará convenientemente, una otra norma que es equivalente a la norma dada en (2.16). Sin inconvenientes se usará la misma notación que la norma anterior, a saber,

“

$$\begin{aligned} \|U\|_X^2 &= \|(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \omega, \omega_t)\|_X^2 \\ &= \int_0^L |\varphi_x|^2 dx + \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \int_0^L |w_x|^2 dx \end{aligned} \quad (2.17)$$

para todo $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \omega, \omega_t) \in X$.

”

4. El Problema de Cauchy

Resolver el sistema (2.1)-(2.4), como ya fuera señalado anteriormente, equivale a resolver un problema de valor inicial de primer orden, para llegar a esta equivalencia, se agrupan las variables anteriores formando la siguiente matriz, $U(t) = [\varphi \ \varphi_t \ \psi \ \psi_t \ w \ w_t]'$, donde el apóstrofe indica la transpuesta. Luego derivando formalmente esta matriz columna $U(t)$ y del sistema (2.1)-(2.4) sustituyendo las expresiones φ_{tt} , ψ_{tt} y w_{tt} en la siguiente matriz se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \\ w \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \varphi_{tt} \\ \psi_t \\ \psi_{tt} \\ w_t \\ w_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\varphi_{xx} - \frac{\kappa_0 l^2}{\rho_1}\varphi + \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x + \frac{\kappa l}{\rho_1}w_x + \frac{\kappa_0 l}{\rho_1}w_x - \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1}g_1(\varphi_t) \\ \psi_t \\ \frac{-\kappa}{\rho_2}\varphi_x + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}\psi - \frac{\kappa l}{\rho_2}w - \frac{\alpha_2(x)}{\rho_2}g_2(\psi_t) \\ w_t \\ \frac{-\kappa_0 l}{\rho_1}\varphi_x - \frac{\kappa l}{\rho_1}\varphi_x - \frac{\kappa l}{\rho_1}\psi + \frac{\kappa_0}{\rho_1}w_{xx} - \frac{\kappa l^2}{\rho_1}w - \frac{\alpha_3(x)}{\rho_1}g_3(w_t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

luego se puede reescribir,

$$\frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\kappa_0 l^2}{\rho_1}I & -\frac{\alpha_1(x)}{\rho_1}g_1(\cdot) & \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x & 0 & (\frac{\kappa l + \kappa_0 l}{\rho_1})\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2}I & -\frac{\alpha_2(x)}{\rho_2}g_2(\cdot) & -\frac{\kappa l}{\rho_2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -(\frac{\kappa_0 l + \kappa l}{\rho_1})\partial_x & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_1}I & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\kappa l^2}{\rho_1}I & -\frac{\alpha_3(x)}{\rho_1}g_3(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \\ w \\ w_t \end{bmatrix}''$$

De esta forma, se construyó la forma matricial equivalente al sistema dado en (2.1)-(2.3); como se observa las entradas de la matriz afectadas por las no linealidades g_i , son las que sugieren aplicar la teoría de semigrupos de operadores no lineales. A este respecto existen bibliografías que solucionan este tipo de sistemas, las que ya fueron mencionadas en la Introducción, se usarán las consideraciones dadas en Brezis [3], las que sugieren expresar la matriz anterior, como una suma de dos matrices que se denota a seguir, como A y B respectivamente, para poder aplicar el corolario 1.6.1. Esto es,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U = & \left(\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\kappa_0 l^2}{\rho_1}I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x & 0 & (\frac{\kappa l + \kappa_0 l}{\rho_1})\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2}I & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -(\frac{\kappa_0 l + \kappa l}{\rho_1})\partial_x & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_1}I & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\kappa l^2}{\rho_1}I & 0 \end{bmatrix} \right. \\
& + \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_1(x)}{\rho_1}g_1(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_2}g_2(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3(x)}{\rho_1}g_3(\cdot) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \\ w \\ w''_t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Abreviadamente y bajo las consideraciones de la teoría empleada, ver [3] se tiene,

$$\frac{d}{dt}U - (A + B)U \ni 0$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}U + \mathcal{A}U \ni 0 \quad \text{donde} \quad \mathcal{A} = -(A + B)$$

en esta última expresión estaría faltando agregar la condición inicial, se prefiere antes establecer el espacio donde está esta condición inicial para así completar el problema de valor inicial, el cual como se sabe es equivalente al sistema que se viene tratando. Para tal, primero se debe calcular el dominio de \mathcal{A} , como siguiente paso.

5. El Dominio del Operador \mathcal{A}

Como ya se tiene al espacio de fase X , se puede definir el dominio del operador \mathcal{A} , esto es,

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= \{U \in X; \mathcal{A}U \in X\} \\ &= \{U \in X; (A + B)U \in X\} \\ &= D(A + B) \\ &= D(A) \cap D(B) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como

$$D(A) = [H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)]^3, \quad D(A) \subset X \text{ y } D(B) = X \implies D(\mathcal{A}) = D(A). \tag{2.19}$$

Finalmente de (2.18) y (2.19) se tiene

$$D(\mathcal{A}) = (H_0^1(0, L)) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L))^3$$

Con las condiciones dadas en (2.6) colocadas en el dominio del operador \mathcal{A} se tiene que el sistema (2.1)-(2.4) es equivalente a,

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} + \mathcal{A}U = 0 \\ U(0) = U_0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Teorema 2.1.1. *Considerando las condiciones dadas en (2.6), se tiene que para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$ existe una única solución fuerte que resuelve el sistema (2.20). Además se tiene que para cada $U_0 \in X$ existe una única solución débil que resuelve el sistema (2.20).*

Demostración: Para hacer esta demostración se usará el teorema (1.6.1), cuya hipótesis consiste en mostrar que $\mathcal{A} = -(A + B)$ es un operador maximal monótono de X , a su vez para mostrar esta hipótesis se usará el corolario enunciado en (1.6.1) cuyas hipótesis serán demostradas a seguir. Para tal, se dividirá la demostración en dos partes.

La primera parte del corolario (1.6.1) pide mostrar que A sea un operador maximal monótono lo que es equivalente, según el teorema dado en “ (1.5.1), ver Brezis en [3], a mostrar que:

(1) El operador $-A$ es monótono y $R(I + A) = X$.

La segunda parte del corolario (1.6.1), ver Barbu en [1], pide mostrar que:

(2) El operador $-B$ sea monótono, hemicontínuo y acotado.”

Prueba de (1):

Sea $[F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6] \in X$ entonces existirá $U = [\varphi \ \varphi_t \ \psi \ \psi_t \ w \ w_t]' \in D(A)$ que verifique:

$$[I - A][\varphi \ \varphi_t \ \psi \ \psi_t \ w \ w_t]' = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6]' \quad (2.21)$$

Equivalentemente,

$$\varphi - \Phi = F_1 \in H_0^1(0, L) \quad (2.22)$$

$$\rho_1 \Phi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = \rho_1 F_2 \in L^2(0, L) \quad (2.23)$$

$$\psi - \Psi = F_3 \in H_0^1(0, L) \quad (2.24)$$

$$\rho_2 \Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_2 F_4 \in L^2(0, L) \quad (2.25)$$

$$w - W = F_5 \in H_0^1(0, L) \quad (2.26)$$

$$\rho_1 W - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 F_6 \in L^2(0, L) \quad (2.27)$$

De (2.22), (2.24) y (2.26),

$$\Phi = -\varphi - F_1 \in H_0^1(0, L) \quad (2.28)$$

$$\Psi = -\psi - F_3 \in H_0^1(0, L) \quad (2.29)$$

$$W = -w - F_5 \in H_0^1(0, L) \quad (2.30)$$

Sustituyendo (2.28), (2.29) y (2.30), en (2.23), (2.25) y (2.27), respectivamente, se tiene, ■

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] &= f_1, \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) &= f_2, \\ \rho_1w - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) &= f_3 \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde

$$f_1 = \rho_1(F_1 + F_2), \quad f_2 = \rho_2(F_3 + F_4), \quad f_3 = \rho_1(F_5 + F_6). \quad (2.32)$$

pasando a la formulación débil del sistema anterior, esto es, multiplicando por u, v, z respectivamente, cada una de las ecuaciones del sistema (2.31) e integrando de 0 a L , se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho_1\varphi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi])u dx &= \int_0^L f_1 u dx \\ \int_0^L (\rho_2\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw))v dx &= \int_0^L f_2 v dx \\ \int_0^L (\rho_1w - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw))z dx &= \int_0^L f_3 z dx \end{aligned} \quad (2.33)$$

integrando por partes, las tres ecuaciones y sumándolas se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho_1\varphi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi])u dx &+ \int_0^L (\rho_2\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw))v dx \\ + \int_0^L (\rho_1w - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw))z dx &= \int_0^L f_1 u dx + \int_0^L f_2 v dx + \int_0^L f_3 z dx \end{aligned} \quad (2.34)$$

Los términos a la izquierda de la igualdad anterior sugieren formar la bilineal correspondiente.

Por otra parte, a seguir, se construirán las hipótesis para aplicar el teorema de Lax-Milgram.

Sean $\bar{U}, \bar{V} \in [H_0^1(0, L)]^3$, $\bar{U} = (\phi, \psi, w)$, $\bar{V} = (u, v, z)$, se define la forma bilineal a como sigue,

$$a : (H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L))^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.35)$$

$$(\bar{U}, \bar{V}) \longrightarrow a(\bar{U}, \bar{V}) \quad (2.36)$$

$$a(\bar{U}, \bar{V}) = \int_0^L \rho_1 \varphi u + \rho_2 \psi v + \rho_1 w z + \kappa(\varphi_x + \psi + lw)(u_x + v + lz) + \kappa_0[w_x - l\varphi][z_x - lv] dx \quad (2.37)$$

a seguir se mostrará que a es contínua y coerciva.

(i) a es contínua:

$$\begin{aligned} a(\bar{U}, \bar{V}) &= k \int_0^L \varphi_x u dx + k_0 l^2 \int_0^L \varphi u dx - k \int_0^L \psi_x u dx - (k + k_0) l \int_0^L w_x u dx \\ &+ b \int_0^L \psi_x v dx + k \int_0^L \varphi_x v dx + k \int_0^L \psi u dx + kl \int_0^L w v dx \\ &+ k_0 \int_0^L w_x z_x dx + kl^2 \int_0^L z z dx + (k + k_0) l \int_0^L \varphi_x z dx \\ &+ kl \int_0^L \psi z dx. \end{aligned}$$

“aplicando la desigualdad de Hölder y de Poincaré y la equivalencia entre la norma definida en el espacio de fase y la norma usual,

$$\begin{aligned} |a(\bar{U}, \bar{V})| &\leq k \left[\int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |w_x|^2) dx \right]^{1/2} \left[\int_0^L (|u|^2 + |v|^2 + |z|^2) dx \right]^{1/2} \\ &\leq c \|\bar{U}\| \|\bar{V}\| \end{aligned}$$

Por lo tanto a es contínua.”

(ii) “ a es coerciva:

$$\begin{aligned} a(\bar{U}, \bar{U}) &\geq b \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)^2 dx \\ &\geq c \|\bar{U}\|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto a es coerciva.”

Entonces por el Lema de Lax-Milgram, $\forall F = (f_1, f_2, f_3) \in [L^2(0, L)]^3$ existe un único $\bar{U} \in [H_0^1(0, L)]^3$ tal que verifica,

$$a(\bar{U}, \bar{V}) = \langle F, \bar{V} \rangle \quad \forall \bar{V} \in [H_0^1(0, L)]^3$$

lo que equivale a,

$$\begin{aligned}
& k \int_0^L \varphi_x u dx + k_0 l^2 \int_0^L \varphi u dx - k \int_0^L \psi_x u dx - (k + k_0) l \int_0^L w_x u dx + b \int_0^L \psi_x v dx \\
& + k \int_0^L \varphi_x v dx + k \int_0^L \psi u dx + kl \int_0^L w v dx + k_0 \int_0^L w_x z_x dx + kl^2 \int_0^L z z dx \\
& + (k + k_0) l \int_0^L \varphi_x z dx + kl \int_0^L \psi z dx = \int_0^L f_1 u dx + \int_0^L f_2 v dx + \int_0^L f_3 z dx
\end{aligned}$$

siendo esta expresión igual a la dada en (2.34), existe una única solución débil $U = [\varphi \varphi_t \psi \psi_t w w_t]' \in D(A)$ que resuelve (2.21). Por lo tanto queda demostrada la parte (i). Esto es, el operador $-A$ es maximal monótono.

Prueba de (2):

Se mostrará que $-B$ es un operador monótono, hemicontinuo y acotado.

(i) $-B$ es monótono:

En efecto, considerando las restricciones dadas en (2.6) y de la definición dada en (1.5.2) se verifica que $-B$ satisface:

$$(-BU, U)_X \geq 0$$

(ii) $-B$ es hemicontinuo:

Definición 2.1. Sea $-B : X \longrightarrow X'$ operador, es hemicontinuo si se satisfacen:

(a) $-B$ es unívoco

(b) $\forall U, V \in X; \quad -B(U + \frac{1}{n}V) \rightharpoonup -BU$ en X' cuando $n \rightarrow \infty$

Prueba de (a) : Sea $U = [\varphi \varphi_t \psi \psi_t w w_t]' \in [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^3$ se mostrará que

$$-BU = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi) & 0 & \frac{\alpha_2(x)}{\rho_2} g_2(\Psi) & 0 & \frac{\alpha_3(x)}{\rho_1} g_3(W) \end{bmatrix} \in [H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L)]^3$$

Equivalentemente, se muestra,

$$(1) \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi) \in L^2(0, L) \quad (2) \frac{\alpha_2(x)}{\rho_2} g_2(\Psi) \in L^2(0, L) \quad (3) \frac{\alpha_3(x)}{\rho_1} g_3(W) \in L^2(0, L)$$

con lo que concluye la prueba.

Prueba de (b) : Para la hemicontinuidad se considera

$$U_1 = (\varphi_1, \Phi_1, \psi_1, \Psi_1, w_1, W_1)' \quad ; \quad U_2 = (\varphi_2, \Phi_2, \psi_2, \Psi_2, w_2, W_2)' \in X$$

se mostrará lo siguiente,

$$-B(U_1 + \frac{1}{n}U_2) = -B \begin{bmatrix} \varphi_1 + \frac{1}{n}\varphi_2 \\ \Phi_1 + \frac{1}{n}\Phi_2 \\ \psi_1 + \frac{1}{n}\psi_2 \\ \Psi_1 + \frac{1}{n}\Psi_2 \\ w_1 + \frac{1}{n}w_2 \\ W_1 + \frac{1}{n}W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1}g_1(\Phi_1 + \frac{1}{n}\Phi_2) \\ 0 \\ \frac{\alpha_2(x)}{\rho_2}g_2(\Psi_1 + \frac{1}{n}\Psi_2) \\ 0 \\ \frac{\alpha_3(x)}{\rho_1}g_3(W_1 + \frac{1}{n}W_2) \end{bmatrix} \rightharpoonup \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1}g_1(\Phi_1) \\ 0 \\ \frac{\alpha_2(x)}{\rho_2}g_2(\Psi_1) \\ 0 \\ \frac{\alpha_3(x)}{\rho_1}g_3(W_1) \end{bmatrix}$$

lo que es equivalente a mostrar,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1(x)g_1(\Phi_1 + \frac{1}{n}\Phi_2), \Phi)_{L^2} &= (\alpha_1(x)g_1(\Phi_1), \Phi)_{L^2(0,L)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_2(x)g_2(\Psi_1 + \frac{1}{n}\Psi_2), \Psi)_{L^2} &= (\alpha_2(x)g_2(\Psi_1), \Psi)_{L^2(0,L)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_3(x)g_3(W_1 + \frac{1}{n}W_2), W)_{L^2} &= (\alpha_3(x)g_3(W_1), W)_{L^2(0,L)} \end{cases} \quad (2.38)$$

para todo Φ, Ψ y $W \in L^2(0, L)$.

Se mostrará solamente la primera igualdad, ya que las otras se siguen de manera enteramente análoga. Para este fin, se usará el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Con las variables anteriores, sea la sucesión

$$f_n(x) = \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1}g_1(\Phi_1(x) + \frac{1}{n}\Phi_2(x))\Phi(x) \quad (2.39)$$

la cual se observa que es integrable, i.e., $f_n \in L^1(0, L)$. Ahora hallando el límite puntual, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x)) \Phi(x) = \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi_1(x)) \Phi(x)$$

se define este límite como una función $f(x)$, i.e.,

$$f(x) = \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi_1(x)) \Phi(x)$$

se observa también que esta función es medible, verificándose entonces:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{en c. t. p. en } (0, L)$$

Resta hallar una función g integrable que verifique: $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Para tal se consideran los siguientes conjuntos:

$$X_n = \left\{ x \in [0, L]; |\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x)| \leq 1 \right\} \quad (2.40)$$

$$Y_n = \left\{ x \in [0, L]; |\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x)| > 1 \right\} \quad (2.41)$$

a) Para $x \in X_n$: Sea $\Phi(x)$ cualquiera en $L^2(0, L)$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x)) \Phi(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} \right| \left| (g_1(\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x))) \right| |\Phi(x)| \end{aligned} \quad (2.42)$$

como g_1 es monótona creciente y $|\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x)| \leq 1$ se verifica:

$$|g_1(\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x))| \leq M$$

luego sustituyendo en (2.42) se encontró una función $g(x) \in L^1(X_n)$, i.e.,

$$|f_n(x)| \leq \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} M |\Phi(x)| = g(x)$$

Entonces, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x)) \Phi(x) dx = \int_{X_n} \frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\Phi_1(x)) \Phi(x) dx$$

b) Para $x \in Y_n$: Análogo al caso anterior.

Con esto queda demostrado (2.38). Por lo tanto, de lo expuesto $-B$ es hemicontinuo.

Es evidente que el operador $-B$ transforma subconjuntos acotados en subconjuntos acotados, concluyéndose la prueba de (2).

De (1) y (2) , el operador \mathcal{A} es maximal monótono, luego del teorema (2.32) se concluye la demostración.

Finalmente teniendo en cuenta las consideraciones dadas en (2.6) y siendo el operador \mathcal{A} maximal monótono se tiene que, para cada $U_0 \in D(A)$ existe una única solución fuerte o clásica . Además, si $U_0 \in H$ entonces existe una única solución generalizada o mild solution.

Por el análisis realizado anteriormente se tiene el siguiente resultado:

Considerándose las hipótesis dadas en (H1-H2-H3) el problema abstracto de Cauchy tiene solución fuerte si U_0 está en el dominio del operador y tiene solución generalizada si $U_0 \in H$.

Capítulo 3

Desigualdad de Observabilidad

Este capítulo exhibe una parte crucial y compleja del método que se usa, para hallar la estabilidad asintótica, a saber, la llamada Desigualdad de Observabilidad, la cual, permite realizar las estimativas adecuadas cuando los métodos padrones fallan; el análisis comienza considerando, más bien, el sistema conservativo dado en (2.1)-(2.4), puesto que al igual que el sistema con amortiguamiento poseen la misma energía. Antes de demostrar el teorema de la Desigualdad de Observabilidad se demostrarán 2 lemas técnicos en los cuales será suficiente considerar soluciones fuertes para luego por argumentos de densidad extender los resultados.

Considere $|\Gamma| := a_2 - a_1$ y ϵ_0 , suficientemente pequeño tal que verifique

$$0 < \epsilon_0 < \frac{|\Gamma|}{2}$$

y la siguiente función continua por partes en \mathcal{C}^1 :

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda - 1)x, & \text{si } x \in [0, a_1 + \epsilon_0] \\ \lambda(x - a_1 - \epsilon_0) + \frac{a_1 - a_2 + 2\epsilon_0}{L}(a_1 + \epsilon_0) & \text{si } x \in [a_1 + \epsilon_0, a_2 - \epsilon_0] \\ (\lambda - 1)(x - L) & \text{si } x \in (a_2 - \epsilon_0, L] \end{cases}$$

donde $\lambda := \frac{a_1 - a_2 + 2\epsilon_0}{L} \in [0, 1[$ y $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$

Lema 3.1. *En las condiciones dadas del sistema (2.12) y considerando la energía definida en (2.7), para ϵ suficientemente pequeño y $T > 0$ suficientemente grande, y para algún C_ϵ positivo (no depende de las soluciones del sistema conservativo), se verifica,*

$$E(0) \leq C \left(\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 dxdt + C_\epsilon \int_0^T \varphi_x^2 + \psi_x^2 + w_x^2 dxdt \right) \quad (3.1)$$

para $T > 0$ suficientemente grande existe una constante $c > 0$ que no depende de la solución del sistema (2.12).

Demostración:

Multiplicando la primera ecuación de (2.12) por $\varphi_x g_\lambda$ e integrando de 0 a T y de 0 a L , se tiene,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_x g_\lambda dxdt - \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x g_\lambda dxdt - \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi) \varphi_x g_\lambda dxdt \\ 0 &= \rho_1 \int_0^L [\varphi_t \varphi_x g_\lambda]_0^T dx - \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t \varphi_{tx} g_\lambda dt dx - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x g_\lambda dxdt \\ &\quad - k_0 l \int_0^T [(w_x - l\varphi) \varphi g_\lambda]_0^L dt + k_0 l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x g_\lambda \varphi dxdt + k_0 l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi) g'_\lambda \varphi dxdt \\ 0 &= \rho_1 \int_0^L [\varphi_t \varphi_x g_\lambda]_0^T dx - \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t \varphi_{tx} g_\lambda dt dx - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x g_\lambda dxdt \\ 0 &= \rho_1 \int_0^L [\varphi_t \varphi_x g_\lambda]_0^T dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L \left(\frac{d}{dx} |\varphi_t|^2 \right) g_\lambda dxdt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x g_\lambda dxdt \\ &\quad + k_0 l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x g_\lambda \varphi dxdt + k_0 l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi) g'_\lambda \varphi dxdt \\ 0 &= \rho_1 \int_0^L [\varphi_t \varphi_x g_\lambda]_0^T dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^T |\varphi_t|^2 g_\lambda|_0^L dt + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L |\varphi|^2 g'_\lambda dxdt \\ &\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x g_\lambda dxdt + k_0 l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x g_\lambda \varphi dxdt \end{aligned}$$

$$+k_0l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)g'_\lambda \varphi dxdt \quad (3.2)$$

Multiplicando la segunda ecuación de (2.12) por $\psi_x g_\lambda$ e integrando de 0 a T y de 0 a L ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_x g_\lambda dxdt - \int_0^T \int_0^L b \psi_{xx} \psi_x g_\lambda dxdt + \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw) \psi_x g_\lambda dxdt \\ 0 &= \rho_2 \int_0^L [\psi_t \psi_x g_\lambda]_0^T dx - \rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi_t \psi_{tx} g_\lambda dxdt - \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \left(\frac{d}{dx} |\psi_x|^2 \right) g_\lambda dxdt \\ &\quad + \int_0^T [k(\varphi_x + \psi + lw) \psi g_\lambda]_0^L dt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g_\lambda \psi dxdt \\ &\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda \psi dxdt \\ 0 &= \rho_2 \int_0^L [\psi_t \psi_x g_\lambda]_0^T dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \left(\frac{d}{dx} |\psi_t|^2 \right) g_\lambda dxdt - \frac{b}{2} \int_0^T [\frac{d}{dx} |\psi_x|^2 g_\lambda]_0^L dt \\ &\quad + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 g'_\lambda \psi dxdt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g_\lambda \psi dxdt \\ &\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda \psi dxdt \\ 0 &= \rho_2 \int_0^L [\psi_t \psi_x g_\lambda]_0^T dx - \frac{\rho_2}{2} \int_0^T [|\psi_t|^2 g_\lambda]_0^L dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 g'_\lambda dxdt \\ &\quad - \frac{b}{2} \int_0^T [\frac{d}{dx} |\psi_x|^2 g_\lambda]_0^L dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 g'_\lambda \psi dxdt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g_\lambda \psi dxdt \\ &\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda \psi dxdt \end{aligned} \quad (3.3)$$

Multiplicando la tercera ecuación de (2.12) por $w_x g_\lambda$ e integrando de 0 a T y de 0 a L ,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L \rho_1 w_{tt} w_x g_\lambda dx dt - k_0 \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x w_x g_\lambda dx dt \\
&\quad + kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x w_x g_\lambda dx dt \\
0 &= \rho_1 \int_0^L [w_t w_x g_\lambda]_0^T dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^T [|w_t|^2 g_\lambda]_0^L dt + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L |w_t|^2 g'_\lambda dx dt \\
&\quad - k_0 \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x w_x g_\lambda dx dt + kl \int_0^T [(w_x - l\varphi) w g_\lambda]_0^L dt \\
&\quad - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g_\lambda w dx dt - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt \\
0 &= \rho_1 \int_0^L [w_t w_x g_\lambda]_0^T dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L |w_t|^2 g'_\lambda dx dt - k_0 \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x w_x g_\lambda dx dt \\
&\quad - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g_\lambda w dx dt - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Sumando (3.2), (3.4) y (3.5), se tiene,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2) g'_\lambda dx dt \\
&\quad + k_0 l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x g_\lambda \varphi dx dt + k_0 l \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi) g'_\lambda dx dt - k_0 \int_0^T \int_0^L (w_x - l\varphi)_x \psi_x g_\lambda dx dt \\
&\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_x g_\lambda dx dt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g_\lambda \psi dx dt \\
&\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g'_\lambda \psi dx dt - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x g_\lambda w dx dt \\
&\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt - \frac{b}{2} \int_0^T [\frac{d}{dx} |\psi_x|^2 g_\lambda]_0^L dt \\
&\quad + \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2) g'_\lambda dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L k_0 (w_x - l\varphi)_x (w_x - l\varphi) g_\lambda dx dt + \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi)_x g'_\lambda \varphi dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L k (\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) g_\lambda dx dt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda \psi dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L kl (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt - \frac{b}{2} \int_0^T \left[\frac{d}{dx} |\psi_x|^2 g_\lambda \right]_0^L dt \\
&\quad + \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \\
0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2) g'_\lambda dx dt \\
&\quad - \frac{k_0}{2} \int_0^T \left[|w_x - l\varphi|^2 g_\lambda \right]_0^L dt + \frac{k_0}{2} \int_0^T \int_0^L |w_x - l\varphi|^2 g'_\lambda dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi) g'_\lambda \varphi dx dt - \frac{k}{2} \int_0^T \left[|\varphi_x + \psi + lw|^2 g_\lambda \right]_0^L dt \\
&\quad + \frac{k}{2} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2 g'_\lambda dx dt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 g'_\lambda \psi dx dt \\
&\quad - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt - \frac{b}{2} \int_0^T \left[|\psi_x(L)|^2 g_\lambda(L) - \psi_x(0) g_\lambda(0) \right] dt \\
&\quad + \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \\
0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2) g'_\lambda dx dt \\
&\quad + \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T + \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi) g'_\lambda \varphi dx dt \\
&\quad - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 g'_\lambda \psi dx dt - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt \tag{3.6}
\end{aligned}$$

De la definición de g_λ :

$$g'_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x \in [a_1 + \varepsilon_0, a_2 - \varepsilon_0] \\ (\lambda - 1) & \text{si } x \in [0, a_1 + \varepsilon_0) \cup (a_2 - \varepsilon_0, L] \end{cases}$$

De la expresión (3.6) se tiene,

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda - 1) \int_0^T \int_0^{a_1 + \varepsilon_0} \frac{1}{2} (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2) dx dt \\ &\quad + (\lambda - 1) \int_0^T \int_{a_2 - \varepsilon_0}^L \frac{1}{2} (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2) dx dt \\ &\quad + \lambda \int_0^T \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} \frac{1}{2} (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi) g'_\lambda \varphi dx dt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 g'_\lambda \psi dx dt \\ &\quad - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt + \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \\ (1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt &\leq \lambda \int_0^T \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} \frac{1}{2} (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 \\ &\quad + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi) g'_\lambda \varphi dx dt - k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 g'_\lambda \psi dx dt \\ &\quad - kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt \\ &\quad + \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $|g_\lambda| < c_1$, tomando valor absoluto en la última integral de (3.7) y aplicando la desigualdad de Young, se tiene,

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \\
& \leq \int_0^L \left[\frac{1}{2} |[\rho_1(\varphi_t^2 + \varphi_x^2) + \rho_2(\psi_t^2 + \psi_x^2) + \rho_1(w_t^2 + w_x^2)]| |g_\lambda(x)| dx \right]_0^T \\
& \leq c_1 \left[c_2 \int_0^L \frac{1}{2} (|\varphi_t|^2 + |\psi_t|^2 + |w_t|^2 + |\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |w_x|^2) dx \right]_0^T
\end{aligned}$$

Usando la norma dada en (2.17) desde que ésta es equivalente a la definida en (2.16) se tiene,

$$\begin{aligned}
& = c_3 |E(T) - E(0)| \\
& \leq c_3 (|E(T)| + |E(0)|) \\
& = c \cdot E(0)
\end{aligned}$$

luego,

$$\left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \leq c \cdot E(0) \quad (3.8)$$

pues $E(T) = E(0)$, desde que $E(T)$ se conserva.

Estimando en (3.7) el siguiente término

$$\begin{aligned}
- \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l\varphi) \varphi g'_\lambda dx dt & \leq k_0 l \int_0^T \int_0^L |w_x - l\varphi| |\varphi| |g'_\lambda| dx dt \\
& \leq k_0 l \int_0^T \int_0^L \varepsilon |w_x - l\varphi|^2 dx dt + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi|^2 dx dt \\
& \leq \int_0^T \int_0^L \varepsilon [k_0 l |w_x + l\varphi|^2 + \text{términos de la energía}] dx dt \\
& \quad + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi|^2 dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \varepsilon E(0) dt + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi|^2 dx dt \\
&= \varepsilon E(0)T + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi|^2 dx dt
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Estimando en (3.7) el término,

$$\begin{aligned}
-k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda \psi dx dt &\leq \int_0^T \int_0^L \varepsilon |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L L c_\varepsilon |\psi|^2 dx dt \\
&\leq \int_0^T \varepsilon E(0) dt + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \\
&\leq \varepsilon T E(0) + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Estimando en (3.7) el término,

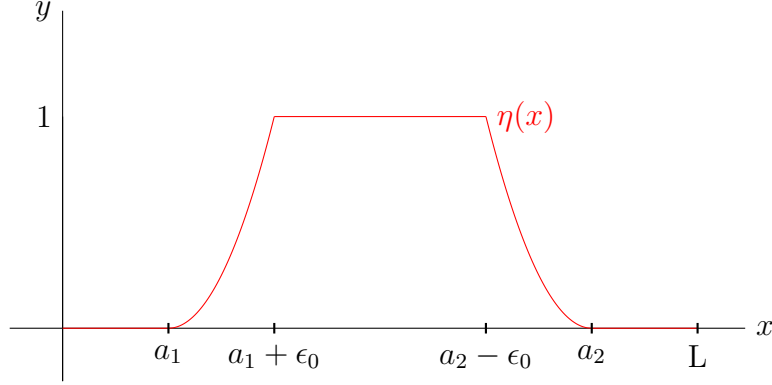
$$-kl \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) g'_\lambda w dx dt \leq \varepsilon T \varepsilon_0 + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |w|^2 dx dt \tag{3.11}$$

Sustituyendo (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) en (3.7) ; donde $|\lambda| \leq 1$, se tiene,

$$\begin{aligned}
(1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt &\leq \int_0^T \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} \frac{1}{2} (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2) dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} b |\psi_x|^2 dx dt + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx dt \\
&\quad + cE(0) + \varepsilon E(0)T + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi|^2 dx dt + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \\
&\quad + \varepsilon E(0)T + c_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |w|^2 dx dt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ahora estimando la segunda integral de la derecha en la expresión (3.12), para tal se considera la siguiente función $\eta \in C_0^\infty(0, L)$ definida por:

$$\begin{cases} 0 \leq \eta(x) \leq 1 & \forall x \in (0, L) \\ \eta(x) = 0 & \text{en } (0, a_1) \cup (a_2, L) \\ \eta(x) = 1 & \text{en } (a_1 + \varepsilon_0, a_2 - \varepsilon_0) \end{cases}$$



Multiplicando por $\varphi\eta$ la primera ecuación del sistema (2.12) e integrando de 0 a T y de 0 a L ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} \varphi \eta dx dt - \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi \eta dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi) \varphi \eta dx dt \\ 0 &= \int_0^L [\rho_1 \varphi_t \varphi \eta dx]_0^T - \int_0^T \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 \eta dx dt - \int_0^T [k(\varphi_x + \psi + lw) \varphi \eta]_0^L dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw) \varphi_x \eta dx dt + \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw) \varphi \eta_x dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L k_0 l(w_x - l\varphi) \varphi \eta dx dt \\ 0 &= \int_0^L [\rho_1 \varphi_t \varphi \eta]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 \eta dx dt + \int_0^T \int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw) \varphi_x \eta dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \left[\frac{k}{2} \varphi^2 \eta_x \right]_0^L dt - \int_0^T \int_0^L \frac{k}{2} \varphi^2 \eta_{xx} dx dt \int_0^T \int_0^L k \psi \varphi \eta_x dx dt + \int_0^T \int_0^L k l w \varphi \eta_x dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l \varphi) \varphi \eta dx dt
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L [\rho_1 \varphi_t \varphi \eta]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 \eta dx dt + \int_0^T \int_0^L k (\varphi_x + \psi + l w) \varphi_x \eta dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L \frac{k}{2} \varphi^2 \eta_{xx} dx dt \int_0^T \int_0^L k \psi \varphi \eta_x dx dt + \int_0^T \int_0^L k l w \varphi \eta_x dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L k_0 l (w_x - l \varphi) \varphi \eta dx dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Multiplicando por $\psi \eta$ la segunda ecuación del (2.12) e integrando de 0 a T y de 0 a L ,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi \eta dx dt - \int_0^T \int_0^L b \psi_{xx} \psi \eta dx dt + \int_0^T \int_0^L k (\varphi_x + \psi + l w) \psi \eta dx dt \\
0 &= \int_0^L [\rho_2 \psi_t \psi \eta]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_t^2 \eta dx dt - \int_0^T [b \psi_x \psi \eta]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L b \psi_x^2 \eta dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L b \psi_x \psi \eta_x dx dt + \int_0^T \int_0^L k (\varphi_x + \psi + l w) \psi \eta dx dt \\
0 &= \int_0^L [\rho_2 \psi_t \psi \eta]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_t^2 \eta dx dt + \int_0^T \int_0^L b \psi_x^2 \eta dx dt - \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi^2 \eta_{xx} dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L k (\varphi_x + \psi + l w) \psi \eta dx dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Multiplicando por $w \eta$ la tercera ecuación de (2.12) e integrando de 0 a T y de 0 a L ,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L \rho_1 w_{tt} w \eta dx dt - \int_0^T \int_0^L k_0 (w_x - l\varphi)_x w \eta dx dt + \int_0^T \int_0^L kl(\varphi_x + \psi + lw) w \eta dx dt \\
0 &= \int_0^L [w_t w \eta]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \rho_1 w_t^2 \eta dx dt - \int_0^T [k_0 (w_x - l\varphi) w \eta]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L k_0 (w_x - l\varphi) w_x \eta dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L k_0 (w_x - l\varphi) w \eta_x dx dt + \int_0^T \int_0^L kl(\varphi_x + \psi + lw) w \eta dx dt \\
0 &= \int_0^L \rho_1 [w_t w \eta]_0^T dx - \int_0^T \int_0^L \rho_1 w_t^2 \eta dx dt + \int_0^T \int_0^L k_0 (w_x - l\varphi) w_x \eta dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^L \frac{k_0}{2} w^2 \eta_{xx} dx dt - \int_0^T \int_0^L k_0 l \varphi w \eta_x dx dt + \\
&\int_0^T \int_0^L kl(\varphi_x + \psi + lw) w \eta dx dt \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Sumando (3.13), (3.14), (3.15) y ordenando adecuadamente,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^L (b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2) \eta dx dt \\
&= - \int_0^L [\rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 w_t w]_0^T \eta dx + \int_0^T \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 \varphi + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 \eta dx dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (k|\varphi|^2 + b|\psi|^2 + k_0|w|^2) \eta_{xx} dx dt - \int_0^T \int_0^L (k\psi \varphi + klw \varphi - k_0 l \varphi w) \eta_x dx dt \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Estimando en (3.16) el siguiente término,

$$\begin{aligned}
&- \int_0^L [\rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 w_t w]_0^T \eta(x) dx \\
&\leq \int_0^L \frac{1}{2} [\rho_1 (|\varphi_t|^2 + c_p |\varphi_x|^2) + \rho_2 (|\psi_t|^2 + c_p |\psi_x|^2) + \rho_1 (|w_t|^2 + c_p |w_x|^2)]_0^T \eta(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |c \int_0^L \frac{1}{2}(|\varphi_t|^2) + |\psi_t|^2 + |w_t|^2 + |\varphi_x|^2 + |\psi_x|^2 + |w_x|^2)dx]_0^T| \\
&\leq c|E(T) - E(0)| \leq c|E(T)| + |E(0)| = cE(0)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

desde que es válida la desigualdad de Poincaré y la equivalencia entre la norma de la energía y la norma usual en X .

Estimando en (3.16) el siguiente término:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^L (\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2) + \rho_1(|w_t|^2)\eta(x)dxdt \\
&= \int_0^T \int_{a_1+\epsilon_0}^{a_2-\epsilon_0} \rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1(|w_t|^2)dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2dxdt
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Nuevamente estimando el siguiente término en (3.16):

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_0^L (k\psi\varphi + klw\varphi - k_0l\varphi w)\eta_x dxdt, \quad \text{usando Young :} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L k(\psi^2 + \varphi^2) + kl(w^2 + \varphi^2) + k_0l(\varphi^2 + w^2)|\eta_x|dxdt \\
&\leq c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} |\varphi|^2 + |\psi|^2 + |w|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Sustituyendo (3.17), (3.18), (3.19) en (3.16) y desde que $|\eta| \leq 1$:

$$\int_0^T \int_{a_1+\epsilon_0}^{a_2-\epsilon_0} (b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2)\eta dxdt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2) dx dt \\
&\leq cE(0) + c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 dx dt \\
&\quad + c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\varphi^2 + \psi^2 + w^2) dx dt \quad c=\text{constante positiva} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

luego de la función η se tiene de lo anterior:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{a_1+\epsilon_0}^{a_2-\epsilon_0} b|\psi_x|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx dt \\
&\leq cE(0) + \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 dx dt + c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \varphi^2 + \psi^2 + w^2 dx dt \\
&\text{donde, } c = \text{constante positiva.} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Luego sustituyendo (3.21) en (3.12) y como $E(t) = E(0) \forall t$, se tiene,

$$\begin{aligned}
(1 - \lambda)E_0T &\leq \int_0^T \int_{a_1+\epsilon_0}^{a_2-\epsilon_0} \frac{1}{2}(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|\omega_t|^2) dx dt \\
&\quad + cE(0) + c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|\omega_t|^2) dx dt \\
&\quad + c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\varphi^2 + \psi^2 + \omega^2) dx dt \\
&\quad + cE(0) + \epsilon E(0)T + c_\epsilon \int_0^T \int_0^l |\varphi|^2 dx dt + \epsilon E(0)T + C_\epsilon \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt; \\
&\quad + \epsilon E(0)T + C_\epsilon \int_0^T \int_0^L |\omega|^2 dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 |\psi_t| + \rho_1 |\omega_t|^2) dx dt \\
&+ c_\epsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + \omega^2) dx dt + cE(0) + 3\epsilon E(0)T \\
(1 - \lambda - 3\epsilon)E_0 T &\leq CE_0 + c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2) dx dt \\
&+ c_\epsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + \omega^2) dx dt
\end{aligned}$$

tomando ϵ , tal que $\epsilon < \frac{1-\lambda}{3}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
tE_0 &\leq \tilde{c}E_0 + \tilde{c} \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2) dx dt \\
&+ \tilde{c} \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + \omega^2) dx dt; \quad \tilde{c} = \frac{c}{1-\lambda-3\epsilon}
\end{aligned}$$

luego

$$(T - \tilde{c})E_0 \leq \tilde{c} \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2) dx dt + \tilde{c}_\epsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + \omega^2) dx dt$$

Finalmente tomando $T > \tilde{c}$, se concluye,

$$E_0 \leq c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2) dx dt + c_\epsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + \omega^2) dx dt \quad (3.22)$$

donde $c > 0$ depende de λ y ϵ , pero no de T ni de la solución del sistema conservativo. ■

Lema 3.2. *En las condiciones dadas del sistema (2.12), para $T > 0$ suficientemente grande, existe una constante $c > 0$ tal que se verifica:*

$$\int_0^T \int_0^L \varphi^2 + \psi^2 + \omega^2 dx dt \leq c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2 dx dt \quad (3.23)$$

Demostración:

La demostración será hecha por contradicción.

Considere la desigualdad dada en (3.23) falsa, siendo así se puede encontrar una sucesión de soluciones nulas $\{\varphi_v, \psi_v, \omega_v\}_{v \in \mathbb{N}}$ que verifiquen:

$$\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt > v \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \varphi_{v_t}^2 + \rho_2 \psi_{v_t}^2 + \rho_1 \omega_{v_t}^2) dx dt,$$

lo que verifica,

$$\frac{\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \varphi_{v_t}^2 + \rho_2 \psi_{v_t}^2 + \rho_1 \omega_{v_t}^2) dx dt}{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt} \longrightarrow 0, \text{ cuando } v \longrightarrow \infty$$

Denotando:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_v &= \frac{\varphi_v}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt}} \\ \widehat{\psi}_v &= \frac{\psi_v}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt}} \\ \widehat{\omega}_v &= \frac{\omega_v}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Derivando respecto a t estas expresiones en (3.24):

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_v &= \frac{\varphi_{v_t}}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt}} \\ \widehat{\psi}_v &= \frac{\psi_{v_t}}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt}} \\ \widehat{\omega}_v &= \frac{\omega_{v_t}}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt}} \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \widehat{\varphi}_{v_t}^2 + \rho_2 \widehat{\psi}_{v_t}^2 + \rho_1 \widehat{\omega}_{v_t}^2) dx dt = \frac{\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\varphi_{v_t}^2 + \psi_{v_t}^2 + \omega_{v_t}^2) dx dt}{\int_0^T \int_0^L (\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \omega_v^2) dx dt} < \frac{1}{v}$$

tomando límite cuando $v \rightarrow \infty$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \widehat{\varphi}_{v_t}^2 + \rho_2 \widehat{\psi}_{v_t}^2 + \rho_1 \widehat{\omega}_{v_t}^2) dx dt \right) = 0 \quad (3.25)$$

también de (3.24) se tiene,

$$\int_0^T \int_0^L (\rho_1 \widehat{\varphi}_{v_t}^2 + \rho_2 \widehat{\psi}_{v_t}^2 + \rho_1 \widehat{\omega}_{v_t}^2) dx dt = 1 \quad \text{para todo } v \in \mathbb{N}. \quad (3.26)$$

de (3.25) y (3.26) respectivamente se tiene,

$$\begin{aligned} (\widehat{\varphi}_{v_t}, \widehat{\psi}_{v_t}, \widehat{\omega}_{v_t}) & \text{ son acotadas en } L^2(0, T); L^2([a_1, a_2]) \\ (\widehat{\varphi}_v, \widehat{\psi}_v, \widehat{\omega}_v) & \text{ son acotadas en } L^2(0, T); L^2(0, L) \end{aligned} \quad (3.27)$$

luego, se tiene,

$$E_v = E_v(0) \leq c \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \widehat{\varphi}_{v_t}^2 + \rho_2 \widehat{\psi}_{v_t}^2 + \rho_1 \widehat{\omega}_{v_t}^2) dx dt + \int_0^T \int_0^L (\widehat{\varphi}_v^2 + \widehat{\psi}_v^2 + \widehat{\omega}_v^2) dx dt$$

Por (3.27) la expresión de la derecha de la desigualdad anterior está acotada, luego los términos que conforman $E_v(E)$ están acotados, esto es;

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{\varphi}_{vt}), (\tilde{\psi}_{vt}), (\tilde{\omega}_{vt}) \text{ están acotados en } L^2(0, T; L^2(0, L)) \\ (\tilde{\psi}_v) \text{ está acotado en } L^2(0, T; H_0^1(0, L)) \\ (\tilde{\varphi}_{vx} + \tilde{\psi}_{vt} + \tilde{\omega}_{vt}), (\tilde{\omega}_{vx} - l\tilde{\varphi}_v) \text{ están acotados en } L^2(0, T; L^2(0, L)) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Resta mostrar (φ_v) y (ω_v) acotadas en $L^2(0, T; L^2(0, L))$, en efecto:

Sea

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_v(x, t) &= \int_0^t \varphi'_v(x, s) ds + \tilde{\varphi}_v(0) \\
|\tilde{\varphi}_v(x, t)|^2 &= \left| \int_0^t \frac{d}{ds} \tilde{\varphi}(x, s) ds + \tilde{\varphi}_v(0) \right|^2 \\
&\leq 2 \int_0^t \left| \frac{d}{ds} \tilde{\varphi}(x, s) \right|^2 ds + 2|\tilde{\varphi}_v(0)|^2 \\
\int_0^L |\tilde{\varphi}_v(x, t)|^2 dx &\leq 2 \int_0^L \left[\int_0^T \left| \frac{d}{ds} \tilde{\varphi}(x, s) \right|^2 ds \right] dx + 2 \int_0^L |\varphi_v^2(0)|^2 dx \\
\|\tilde{\varphi}_v(t)\|_{L^2(0,L)}^2 &\leq 2 \left\| \frac{d}{ds} \tilde{\varphi}_v \right\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 + 2\|\varphi_v^2(0)\|_{L^2(0,L)}^2 \\
\int_0^T \|\tilde{\varphi}_v(t)\|_{L^2(0,L)}^2 dt &\leq 2 \int_0^T \|\tilde{\varphi}_v\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 dt + 2 \int_0^T \|\varphi_v^2(0)\|_{L^2(0,L)}^2 dt \\
\|\tilde{\varphi}\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 &\leq 2T\|\tilde{\varphi}'_v\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 + 2T\|\varphi_v^2\|_{L^2(0,L)}^2 \\
&\leq c_1 + c_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\tilde{\varphi}_v$ es acotada en $L^2(0, T; L^2(0, L))$.

Análogamente para $\tilde{\omega}_v$, luego de (3.28) como $(\tilde{\omega}_{vx} - l\tilde{\varphi}_v)$ está acotado y $\tilde{\varphi}_v$ está acotado, entonces $\tilde{\omega}_{vx}$ está acotado en $L^2(0, T; L^2(0, L))$ y por Poincaré $\tilde{\omega}_v$ está acotado en $L^2(0, T; H_0^1(0, L))$.

Ahora de (3.28), como $(\tilde{\varphi}_{vx} + \tilde{\psi}_v + l\tilde{\omega}_v), \tilde{\omega}_v, \tilde{\psi}_v$, están acotados en $L^2(0, T; L^2(0, L))$, también $\tilde{\varphi}_{vx}$ está acotado en $L^2(0, T; L^2(0, L))$; luego por Poincaré $\tilde{\varphi}_v$ está acotado por $L^2(0, T; L^2(0, L))$.

Finalmente, de lo anterior se tienen las siguientes acotaciones,

$$\tilde{\omega}_v \quad \text{está acotado en} \quad L^2(0, T; H_0^1(0, L))$$

$$\tilde{\omega}_{vt} \quad \text{está acotado en} \quad L^2(0, T; L^2(0, L))$$

$$\tilde{\varphi}_{vt} \quad \text{está acotado en} \quad L^2(0, T; L^2(0, L))$$

$$\tilde{\psi}_v \quad \text{está acotado en} \quad L^2(0, T; H_0^1(0, L))$$

$$\tilde{\varphi}_v \quad \text{está acotado en} \quad L^2(0, T; H_0^1(0, L))$$

$$\tilde{\psi}_{vt} \quad \text{está acotado en} \quad L^2(0, T; L^2(0, L))$$

y como $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L) \hookrightarrow L^1(0, L)$; se concluye por el Lema de Lions-Aubin:

$$\tilde{\omega}_v \rightarrow \tilde{\omega} \quad \text{fuerte en} \quad L^2(0, T; L^2(0, L))$$

$$\tilde{\varphi}_v \rightarrow \tilde{\varphi} \quad \text{fuerte en} \quad L^2(0, T; L^2(0, L))$$

$$\tilde{\psi}_v \rightarrow \tilde{\psi} \quad \text{fuerte en} \quad L^2(0, T; L^2(0, L))$$

De estas convergencias fuertes y de (3.26) se tiene:

$$1 = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L (\tilde{\varphi}_v^2 + \tilde{\psi}_v^2 + \tilde{\omega}_v^2) dx dt = \int_0^T \int_0^L (\tilde{\varphi}^2 + \tilde{\psi}^2 + \tilde{\omega}^2) dx dt \quad (3.29)$$

Por otra parte, de las acotaciones en (3.16), se observa que cada una de las sucesiones $\varphi_{vt}, \psi_{vt}, \omega_{vt}$ convergen débil, entonces se tiene,

$$\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \tilde{\varphi}_t^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_t^2 + \rho_1 \tilde{\omega}_t^2) dx dt \leq \liminf_{v \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 \tilde{\varphi}_{vt}^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_{vt}^2 + \rho_1 \tilde{\omega}_{vt}^2) dx dt = 0$$

Luego $\tilde{\varphi}_t = \tilde{\psi}_t = \tilde{\omega}_t = 0$ en $(a_1, a_2) \times (0, T)$.

Junto a este resultado siendo $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}\}$ solución del sistema tratado se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho_1 \tilde{\varphi}_{tt} - k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})_x - k_0 l(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) & = & 0 \text{ en } Q \\ \rho_2 \tilde{\psi}_{tt} - b\tilde{\psi}_{xx} + k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) & = & 0 \text{ en } Q \\ \rho_1 \tilde{\omega}_{tt} - k_0(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})_x + kl(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})_x & = & 0 \text{ en } Q \\ \tilde{\varphi}_t = \tilde{\psi}_t = \tilde{\omega}_t = 0 & \text{ en } & (a_1, a_2) \times (0, T) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

donde $Q = (0, T) \times (0, L)$.

Derivando en el sentido distribucional respecto a t el sistema (3.30) se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho_1 \tilde{\varphi}_{ttt} - k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})_{xt} - k_0 l(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})_t = 0 & \text{ en } & (0, T) \times (0, L) \\ \rho_2 \tilde{\psi}_{ttt} - b\tilde{\psi}_{xxt} + k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})_t = 0 & \text{ en } & (0, T) \times (0, L) \\ \rho_1 \tilde{\omega}_{ttt} - k_0(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})_{xt} + kl(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})_{xt} = 0 & \text{ en } & (0, T) \times (0, L) \\ \tilde{\varphi}_{tt} = \tilde{\psi}_{tt} = \tilde{\omega}_{tt} = 0 & \text{ en } & (a_1, a_2) \times (0, T) \end{array} \right. \quad (3.31)$$

En este sistema (3.31) denotando $\tilde{\varphi}_t = z$, $\tilde{\psi}_t = u$, $\tilde{\omega}_t = v$ se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho_1 z_{tt} - k(z_x + u + lv)_x - k_0 l(v_x - lz) = 0 & \text{ en } & (0, T) \times (0, L) \\ \rho_2 u_{tt} - bu_{xx} + k(z_x + u + lv) = 0 & \text{ en } & (0, T) \times (0, L) \\ \rho_1 v_{tt} - k_0(v_x - lz)_x + kl(z_x + u + lv)_x = 0 & \text{ en } & (0, T) \times (0, L) \\ z = u = v = 0 & \text{ en } & (a_1, a_2) \times (0, T) \end{array} \right. \quad (3.32)$$

donde $U := (z, u, v)$ es solución de (3.32).

Luego usando el teorema de Holmgren (visto en preliminares) en el sistema (3.32) para los abiertos $D_1 = (a_1, a_2) \times (0, T)$ y $D_2 = (0, L) \times (0, T)$ y como el sistema (3.32) visto

como operador diferencial aplicado en U es cero y la solución U es cero en D_1 se concluye que $U = 0$ en D_2 , esto es:

$$z = u = v = 0 \text{ en } (0, L) \times (0, T).$$

Equivalentemente, $\tilde{\varphi}_t = \tilde{\psi}_t = \tilde{\omega}_t = 0$ en c.t.p. de $(0, L) \times (0, T)$.

Luego $\tilde{\varphi}_{tt} = \tilde{\psi}_{tt} = \tilde{\omega}_{tt} = 0$.

Sustituyendo estos valores en el sistema (3.30), se tiene,

$$\begin{cases} -k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})_x - k_0l(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, L) \\ -b\tilde{\psi}_{xx} + k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, L) \\ -k_0(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})_x + kl(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, L) \end{cases} \quad (3.33)$$

Multiplicando (3.33) por $\tilde{\varphi}$ e integrando por partes;

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L -k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})_x \tilde{\varphi} dx dt - \int_0^T \int_0^L k_0l(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) \tilde{\varphi} dx dt \\ 0 &= \int_0^T [-k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) \tilde{\varphi}]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) \tilde{\varphi}_x dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L k_0l(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) \tilde{\varphi} dx dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

Multiplicando (3.33) por $\tilde{\psi}$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L -b\tilde{\psi}_{xx} \tilde{\psi} dx dt + \int_0^T \int_0^L k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) \tilde{\psi} dx dt \\ 0 &= \int_0^T [-b\tilde{\psi}_x \tilde{\psi}]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L b\tilde{\psi}_x \tilde{\psi}_x dx dt + \int_0^T \int_0^L k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) \tilde{\psi} dx dt \end{aligned} \quad (3.35)$$

Multiplicando (3.33) por $\tilde{\omega}$ e integrando por partes,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L -k_0(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})_x \tilde{\omega} dx dt + \int_0^T \int_0^L kl(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) \tilde{\omega} dx dt \\ 0 &= \int_0^T [-k_0(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) \tilde{\omega}]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L k_0(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) \tilde{\omega}_x dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L kl(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) \tilde{\omega} dx dt \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sumando (3.34), (3.35) y (3.36):

$$0 = \int_0^T \int_0^L k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})^2 dxdt + \int_0^T \int_0^L b\tilde{\psi}_x^2 dxdt + \int_0^T \int_0^L k_0(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})^2 dxdt$$

De esta igualdad se tiene:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega} = 0 \\ \tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi} = 0 \\ \tilde{\psi} = 0 \quad \text{por Poincaré} \end{cases} \quad (3.37)$$

Reduciendo (3.37), se tiene,

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_x + l\tilde{\omega} = 0 \\ \tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi} = 0 \\ \tilde{\omega}, \tilde{\varphi} \in H_0^L(0, L) \end{cases} \quad (3.38)$$

Resolviendo (3.38) se tiene,

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{xx} + l^2\tilde{\varphi} = 0 \\ \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L) \end{cases}$$

luego

$$\tilde{\varphi} = c_1 \cos(lx) + c_2 \sin(lx) \quad (3.39)$$

entonces

$$c_1 = 0 \quad y \quad c_2 \sin(lL) = 0$$

En (3.39): $\tilde{\varphi}(x) = c_2 \sin(lx)$

$$\begin{aligned} \rightarrow \tilde{\varphi}_x(x) &= c_2 l \cos(lx) \\ \rightarrow \tilde{\varphi}_x(0) &= c_2 l \end{aligned} \quad (3.40)$$

Por otra parte en (3.38): $\tilde{\varphi}_x(0) + l\tilde{\omega}(0) = 0 \rightarrow \tilde{\varphi}_x(0) = 0$

sustituyendo en (3.40): $c_2 = 0$

Por lo tanto en (3.39): $\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad x \in [0, L]$

Luego en (3.38) se tiene $\tilde{\omega}(x) = 0$ en $[0, L]$, esto es:

$$\varphi = \psi = \omega = 0 \quad [0, L]$$

lo que contradice la expresión dada en (3.29), demostrándose el Lema 3.2. ■

Teorema 3.1 (Desigualdad de Observabilidad). *Sea $\Gamma := (a_1, a_2)$ un intervalo abierto contenido en $(0, L)$. Para $T > 0$ suficientemente grande, existe una constante positiva C_0 (no depende de las soluciones de (2.12)) tal que, toda solución $\{\varphi, \psi, \omega\}$ de (2.12) satisface*

$$E_0 \leq C_0 \left(\int_0^T \int_{\Gamma} \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 \, dx dt \right) \quad (3.41)$$

donde $E_0 := E(0)$ es la energía inicial relacionada a la solución $\{\varphi, \psi, \omega\}$.

Demostración: Sustituyendo (3.23) en (3.22), se concluye la demostración. ■

Capítulo 4

Comportamiento Asintótico

En el presente capítulo se desarrollan previamente algunos resultados a manera de lemas que resuelven el resultado central que se presenta en el Teorema de Estabilidad. Este estudio es basado en los resultados de Lasiecka y Tataru [16] y posteriormente por Cavalcanti et al. [6], en este punto es necesario garantizar la disipación del sistema, para tal se definen a continuación algunas funciones apropiadas.

Lema 4.1. *Sea h definida como,*

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x) \quad (4.1)$$

y $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$, donde h_i son funciones cóncavas y estrictamente crecientes, donde se verifica:

$$(i) \ h_i(sg_i(s)) \geq s^2 + g_i^2(s), \text{ para } |s| \leq 1. \quad (4.2)$$

Observe que dicha función puede construirse directamente, con las hipótesis sobre las funciones g_i dadas en (2.6). Además, con esta función h se puede definir la función r como sigue:

$$(ii) \text{ Sea } r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{|Q|}\right) \text{ donde } Q = (0, T) \times (0, l) \text{ y } |Q| = \text{meas}(Q). \quad (4.3)$$

Como r es monótona creciente, la función $(cI + r)$ es inversible para todo $c \geq 0$. Con esta función r se puede definir la función p :

$$(iii) \text{ Sea } p(x) = (cI + r)^{-1}(Mx) \text{ para } M > 0 \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ constantes, verificándose } p \text{ positiva,}$$

continua y estrictamente creciente, con $p(0) = 0$. (4.4)

Denótese $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$. (4.5)

Observación 4.1. *Del hecho que $p(x)$ es estrictamente creciente se desprende que también $q(x)$ es positiva. En efecto,*

Suponga que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ t. q.: $q(x_0) < 0$

$$q(x_0) = x_0 - (I + P)^{-1}(x_0) < 0$$

aplicando $(I + p)(x_0)$ y como p es positiva, se tiene

$$p(x_0) < 0$$

lo que es una contradicción. Por tanto $q(x)$ es positiva.

Lema 4.2. [Lasiecka y Tataru] *Sean p y q las funciones definidas en el lema anterior; considere la sucesión $\{s_n\}$ de números positivos que verifican,*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Entonces $s_m \leq S(m)$, donde $S(t)$ es una solución de la ecuación diferencial,

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = s_0 \end{array} \right.$$

Además, si $p(x) > 0$ para $x > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$$

Ver [16].

A seguir se establece el resultado principal de esta exposición.

Teorema 4.1. [Teorema de Estabilidad]

Considerando lo establecido en (2.6), existe una constante positiva $T_0 > 0$ tal que si

$\{\varphi, \psi, \omega\}$ es una solución del problema (3) con energía inicial satisfaciendo $E_0 < K$ entonces

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0 \quad (4.6)$$

donde $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, $S(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = E_0 \end{array} \right.$$

donde q está definido en (4.5).

Para demostrar este resultado es necesario establecer el siguiente Lema.

Lema 4.3. Considerando lo establecido en (2.6), se tiene que para $T > 0$ suficientemente grande y $K > 0$ existe una constante positiva \hat{C} que depende de T y K , talque se verifica

$$E(T) \leq \hat{C} \left(\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) + \alpha_2(x)(\psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2) + \alpha_3(x)(w_t^2 + g_3(w_t)^2) dx dt \right) \quad (4.7)$$

para toda solución fuerte $\{\varphi, \psi, w\}$ de (3) que cumpla $E_0 \leq K$.

Demostración:

Se demostrará (4.7), considerando T positivo, suf. grande y $E(T)$ como $E(0)$, puesto que para todo $t > 0$

$$E(t) \leq E_0.$$

Considere $\forall \bar{C} > 0$ existe una solución fuerte $\{\varphi, \psi, \omega\}$, dependiente de \bar{C} , y que no verifique la desigualdad (4.7), pero que cumpla $E_0 \leq K$, i.e.,

$$E_0 > \bar{C} \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) + \alpha_2(x)(\psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2) + \alpha_3(x)(\omega_t^2 + g_3(\omega_t)^2) dx dt.$$

Para facilitar la notación se considerará en adelante: $u' := u_t$ y se escogerá $\bar{C} = n$, $n \in \mathbb{N}$ obteniéndose, para cada $n \in \mathbb{N}$, una sucesión no nula de soluciones fuertes $\{\varphi_n, \psi_n, \omega_n\}$ que verifican $0 < E_n(0) \leq K$ y

$$E_n(0) > n \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) + \alpha_2(x)(\psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2) + \alpha_3(x)(\omega_n'^2 + g_3(\omega_n')^2) dx dt.$$

o equivalentemente,

$$\frac{\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) + \alpha_2(x)(\psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2) + \alpha_3(x)(\omega_n'^2 + g_3(\omega_n')^2) dx dt}{E_n(0)} \leq \frac{1}{n} \quad (4.8)$$

Como la sucesión $\{E_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, de la desigualdad (4.8) se obtiene

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) dx dt = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L \alpha_2(x)(\psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2) dx dt = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L \alpha_3(x)(\omega_n'^2 + g_3(\omega_n')^2) dx dt = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

luego usando las restricciones dadas en (2.6), se obtiene

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_1} \varphi_n'^2 dx dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_2} \psi_n'^2 dx dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_3} \omega_n'^2 dx dt \quad (4.10)$$

Además, la sucesión de funcionales de la energía $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en $(0, T)$ luego,

$$\varphi_n' \rightharpoonup \varphi' \quad \text{débil estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

$$\psi_n' \rightharpoonup \psi' \quad \text{débil estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

$$\omega_n' \rightharpoonup \omega' \quad \text{débil estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

$$\psi_{n,x} \rightharpoonup \psi_x \quad \text{débil estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

$$\omega_{n,x} - l\varphi_n \rightharpoonup \omega_x - l\varphi \quad \text{débil estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + l\omega_n \rightharpoonup \varphi_x + \psi + l\omega \quad \text{débil estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

Debido a la sección anterior que emplea la desigualdad de Poincaré, resultados de compacidad y como los datos iniciales son acotados, se obtiene,

$$\begin{cases} \varphi_n \rightarrow \varphi & \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(0, L)) \\ \psi_n \rightarrow \psi & \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(0, L)) \\ \omega_n \rightarrow \omega & \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(0, L)) \end{cases}$$

Se dividirá la demostración en dos casos:

Caso 1. Si $U = \{\varphi, \varphi', \psi, \psi', \omega, \omega'\} \neq 0$

Sea el siguiente sistema sobre Q ,

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_n'' - \kappa(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n)_x - \kappa_0 l(w_{n,x} - l\varphi_n) + \alpha_1(x)g_1(\varphi_n') &= 0 \\ \rho_2 \psi_n'' - b\psi_{n,xx} + \kappa(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \alpha_2(x)g_2(\psi_n') &= 0 \\ \rho_1 w_n'' - \kappa_0(w_{n,x} - l\varphi_n)_x + \kappa l(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \alpha_3(x)g_3(w_n') &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

De las convergencias anteriores, tomando límite en (4.11) y usando (4.9) y (4.10) se tiene

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - l\varphi) &= 0 & \text{en } Q \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) &= 0 & \text{en } Q \\ \rho_3 w_{tt} - \kappa_0(w_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) &= 0 & \text{en } Q \\ \varphi_t = 0 \text{ en } Q_1, \quad \psi_t = 0 \text{ en } Q_2, \quad \omega_t = 0 \text{ en } Q_3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $Q_i := I_i \times (0, T)$.

Derivando (4.12) respecto a t en el sentido distribucional y substituyendo $\varphi_t = z$, $\psi_t = u$, y $w_t = v$, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_1 z_{tt} - \kappa(z_x + u + lv)_x - \kappa_0 l(v_x - lz) &= 0 & \text{en } Q \\ \rho_2 u_{tt} - bu_{xx} + \kappa(z_x + u + lv) &= 0 & \text{en } Q \\ \rho_3 v_{tt} - \kappa_0(v_x - lz)_x + \kappa l(z_x + u + lv) &= 0 & \text{en } Q \\ z = u = v = 0 & & \text{en } \tilde{I} \times (0, T) \end{aligned}$$

Del Teorema de la Unicidad de Holmgren se deduce que $z = u = v = 0$ en Q y consecuentemente,

$$\varphi_t = \psi_t = \omega_t = 0, \quad \text{en } Q \quad (4.13)$$

De (4.12) se obtiene en Q :

$$\begin{aligned}
& -\kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \\
& -b\psi_{xx} + \kappa l(w_x - l\varphi) = 0 \\
& -\kappa_0(w_x - l\varphi)_x + \kappa l(\omega_x - l\varphi) = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Multiplicando la primera ecuación de (4.14) por φ , la segunda por ψ , la tercera ecuación por ω , luego sumando los resultados obtenidos, se tiene

$$\int_0^T \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw)^2 + b\psi_x^2 + \kappa_0(w_x - l\varphi)^2 dx dt = 0$$

lo que implica de la desigualdad de Poincaré, que $\psi = 0$. Al derivar (4.13) respecto a t se obtiene el siguiente sistema de EDO,

$$\begin{aligned}
\varphi_x + lw &= 0 \\
w_x - l\varphi &= 0 \\
\varphi, \omega &\in H_0^1(0, L)
\end{aligned}$$

de esto se tiene, $\varphi = \omega = 0$, lo cual es una contradicción, concluyéndose para este caso la demostración.

Caso 2. $U = \{\varphi, \varphi', \psi, \psi', \omega, \omega'\} = 0$.

En este caso, estableciendo inicialmente

$$v_n = \sqrt{E_n(0)}, \quad \bar{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\nu_n}, \quad \bar{\psi}_n = \frac{\psi_n}{\nu_n}, \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_n = \frac{\omega}{\nu_n},$$

de (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha_1(x) \left(\bar{\varphi}_n'^2 + \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}_n')^2}{\nu_n^2} \right) + \alpha_2 \left(\bar{\psi}_n'^2 + \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}_n')^2}{\nu_n^2} \right) \\
&+ \alpha_3 \left(\bar{\omega}_n'^2 + \frac{g_3(\nu_n \bar{\omega}_n')^2}{\nu_n^2} \right) dx dt.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Se define para cada n la energía $\bar{E}_n(t)$ del problema normalizado como sigue,

$$\bar{E}_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 + \rho_2 \bar{\psi}_n'^2 + \rho_1 \bar{\omega}_n'^2 + b \bar{\psi}_{n,x}^2 + k_0 [\bar{\omega}_{n,x} - l \bar{\varphi}]^2 + k (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + \bar{\omega}_n)^2 dx,$$

luego,

$$\bar{E}_n(0) = \frac{E_n(0)}{\nu_n^2} = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esta restricción implica las siguientes convergencias

$$\bar{\varphi}'_n \rightharpoonup \bar{\varphi}' \quad \text{débil-estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$\bar{\psi}'_n \rightharpoonup \bar{\psi}' \quad \text{débil-estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

$$\bar{\omega}'_n \rightharpoonup \bar{\omega}' \quad \text{débil-estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$\bar{\psi}_{n,x} \rightharpoonup \bar{\psi}_x \quad \text{débil-estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$(\bar{\omega}_{n,x} - l\bar{\varphi}_n) \rightharpoonup (\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}) \quad \text{débil-estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$(\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{\omega}_n) \rightharpoonup (\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) \quad \text{débil-estrella en } L^\infty(0, T; L^2(0, L)).$$

En consecuencia, de la desigualdad de Poincaré y del teorema de Lions-Aubin, se tiene

$$\bar{\varphi}_n \rightarrow \bar{\varphi} \quad \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(0, L)),$$

$$\bar{\psi}_n \rightarrow \bar{\psi} \quad \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(0, L)),$$

$$\bar{\omega}_n \rightarrow \bar{\omega} \quad \text{fuertemente en } L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

Considerando las convergencias fuertes anteriores, y tomando límite en el siguiente sistema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \bar{\varphi}''_n - k(\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{\omega}_n)_x - k_0 l[\bar{\omega}_{n,x} - l\bar{\varphi}_n] + \alpha_1(x) \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}'_n)}{\nu_n} = 0, \\ \rho_2 \bar{\psi}''_n - b\bar{\psi}_{n,xx} + k(\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{\omega}_n) + \alpha_2(x) \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}'_n)}{\nu_n} = 0, \\ \rho_1 \bar{\omega}''_n - k_0[\bar{\omega}_{n,x} - l\bar{\varphi}_n]_x + kl(\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{\omega}_n) + \alpha_3(x) \frac{g_3(\nu_n \bar{\omega}'_n)}{\nu_n} = 0 \end{array} \right.$$

sobre Q , se llega a:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \bar{\varphi}'' - k(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega})_x - k_0 l[\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}] = 0, & \text{en } Q. \\ \rho_2 \bar{\psi}'' - b\bar{\psi}_{xx} + k(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) = 0, & \text{en } Q, \\ \rho_1 \bar{\omega}'' - k_0[\bar{\omega}_x - l\bar{\varphi}]_x + kl(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{\omega}) = 0, & \text{en } Q, \\ \bar{\varphi}' = \bar{\psi}' = \bar{\omega}' = 0, & \text{en } \tilde{I} \times (0, T). \end{array} \right.$$

donde $\tilde{I} := \bigcap_{i=1}^3 I_i \neq \emptyset$. De la misma forma al Caso 1, se llega a,

$$\bar{\varphi} = \bar{\psi} = \bar{\omega} = 0.$$

Con el fin de llegar a una contradicción, se considera $\{\bar{z}, \bar{u}, \bar{v}\}$ solución del siguiente sistema de Bresse homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \bar{z}_n'' - k(\bar{z}_{n,x} + \bar{u}_n + l\bar{v}_n)_x - k_0 l[\bar{v}_{n,x} - l\bar{z}_n] = 0, & \text{en } Q \\ \rho_2 \bar{u}_n'' - b\bar{u}_{n,xx} + k(\bar{z}_{n,x} + \bar{u}_n + l\bar{v}_n) = 0, & \text{en } Q \\ \rho_1 \bar{v}_n'' - k_0[\bar{v}_{n,x} - l\bar{z}_n]_x + kl(\bar{z}_{n,x} + \bar{u}_n + l\bar{v}_n) = 0, & \text{en } Q, \\ \bar{z}_n(L, t) = \bar{z}_n(0, t) = \bar{u}_n(L, t) = \bar{u}_n(0, t) = \bar{v}_n(L, t) = \bar{v}_n(0, t) = 0, & \text{en } (0, T), \\ \bar{z}_n(x, 0) = \bar{\varphi}_n(x, 0), \quad \bar{z}_n'(x, 0) = \bar{\varphi}_n'(x, 0), & \text{en } (0, L), \\ \bar{u}_n(x, 0) = \bar{\psi}_n(x, 0), \quad \bar{u}_n'(x, 0) = \bar{\psi}_n'(x, 0), & \text{en } (0, L), \\ \bar{v}_n(x, 0) = \bar{\omega}_n(x, 0), \quad \bar{v}_n'(x, 0) = \bar{\omega}_n'(x, 0), & \text{en } (0, L). \end{array} \right.$$

Ahora se define

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\varphi}_n &= \bar{\varphi}_n - \bar{z}_n, \\ \tilde{\psi}_n &= \bar{\psi}_n - \bar{u}_n, \\ \tilde{\omega}_n &= \bar{\omega}_n - \bar{v}_n. \end{array} \right.$$

En este caso, no es difícil notar que $\{\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n, \tilde{\omega}_n\}$ es una solución del siguiente sistema de Bresse no homogéneo,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \tilde{\varphi}_n'' - k(\tilde{\varphi}_{n,x} + \tilde{\psi}_n + l\tilde{\omega}_n)_x - k_0 l[\tilde{\omega}_{n,x} - l\tilde{\varphi}_n] = \alpha_1(x) \frac{g_1(\nu_n \tilde{\varphi}_n')}{\nu_n}, & \text{en } Q, \\ \rho_2 \tilde{\psi}_n'' - b\tilde{\psi}_{n,xx} + k(\tilde{\varphi}_{n,x} + \tilde{\psi}_n + l\tilde{\omega}_n) = \alpha_2(x) \frac{g_2(\nu_n \tilde{\psi}_n')}{\nu_n}, & \text{en } Q, \\ \rho_1 \tilde{\omega}_n'' - k_0[\tilde{\omega}_{n,x} - l\tilde{\varphi}_n]_x + kl(\tilde{\varphi}_{n,x} + \tilde{\psi}_n + l\tilde{\omega}_n) = \alpha_3(x) \frac{g_3(\nu_n \tilde{\omega}_n')}{\nu_n}, & \text{en } Q, \\ \tilde{\varphi}_n(L, t) = \tilde{\varphi}_n(0, t) = \tilde{\psi}_n(L, t) = \tilde{\psi}_n(0, t) = \tilde{\omega}_n(L, t) = \tilde{\omega}_n(0, t) = 0, & \text{en } (0, T), \\ \tilde{\varphi}_n(x, 0) = \tilde{\varphi}_n'(x, 0) = \tilde{\psi}_n(x, 0) = \tilde{\psi}_n'(x, 0) = \tilde{\omega}_n(x, 0) = \tilde{\omega}_n'(x, 0) = 0, & \text{en } (0, L), \end{array} \right.$$

cuya expresión para la energía $\tilde{E}_n(t)$ relacionada con la solución $\{\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n, \tilde{\omega}_n\}$ es la misma que la dada en (2.7). Luego

$$\begin{aligned} 2\tilde{E}_n(t) &\geq \int_0^L (\rho_1 \tilde{\varphi}_n'^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_n'^2 + \rho_1 \tilde{\omega}_n'^2) dx \\ &\geq \int_{\bar{I}} (\rho_1 \tilde{\varphi}_n'^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_n'^2 + \rho_1 \tilde{\omega}_n'^2 + \rho_1 \tilde{z}_n'^2 + \rho_2 \tilde{u}_n'^2 + \rho_1 \tilde{v}_n'^2) dx \\ &\quad - 2 \int_{\bar{I}} (\rho_1 \tilde{\varphi}_n' \tilde{z}_n' + \rho_2 \tilde{\psi}_n' \tilde{u}_n' + \rho_1 \tilde{\omega}_n' \tilde{v}_n') dx, \end{aligned} \tag{4.16}$$

para todo $t \in [0, T]$. Estimando la segunda integral en (4.16) y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz's, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}} \rho_1 \tilde{\varphi}_n' \tilde{z}_n' + \rho_2 \tilde{\psi}_n' \tilde{u}_n' + \rho_1 \tilde{\omega}_n' \tilde{v}_n' dx &\leq \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \tilde{\varphi}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \tilde{z}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \tilde{\psi}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \tilde{u}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \tilde{\omega}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \tilde{v}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y como

$$\epsilon(t) = \bar{E}(0) = 1, \quad t \in [0, T], \quad (4.17)$$

se obtiene

$$\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \{2\epsilon(0)\}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

análogamente

$$\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{u}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{v}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}$$

De estas tres estimativas, sustituyendo en (4.16), se tiene

$$\begin{aligned} 2\bar{E}(t) &\geq \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}_n'^2 + \bar{u}_n'^2 + \bar{v}_n'^2 dx \\ &\quad - 2^{\frac{3}{2}} \left(\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\psi}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\omega}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}_n'^2 + \rho_2 \bar{u}_n'^2 + \rho_1 \bar{v}_n'^2 dx \\ &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} \bar{E}_n(t) + 2^{\frac{3}{2}} \left(\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\psi}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\omega}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Integrando ambos lados de (4.18) sobre $(\epsilon, T - \epsilon)$ y empleando la desigualdad de Young, se tiene

$$\begin{aligned} &2^{\frac{3}{2}}(T - 2\epsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\left\{ \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\psi}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\omega}_n'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + 2(T - 2\epsilon) \sup_{t \in [0, T]} \bar{E}_n(t) \geq \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}_n'^2 + \rho_2 \bar{u}_n'^2 + \rho_1 \bar{v}_n'^2 dx dt \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usando (4.15) en la desigualdad anterior se observa que cada integral converge a cero cuando n va al infinito. Por otra parte el funcional de la energía \bar{E}_n también satisface,

$$\bar{E}_n(t) = - \int_0^t \int_0^L \alpha_1(x) \frac{g_1(v_n \bar{\varphi}'_n(x, s)) \bar{\varphi}'}{v_n} + \alpha_2(x) \frac{g_2(v_n \bar{\psi}'_n(x, s)) \bar{\psi}'}{v_n} + \alpha_3(x) \frac{g_1(v_n \bar{\omega}'_n(x, s)) \bar{\omega}'}{v_n} dx ds,$$

para $t \in [0, T]$, de esto se tiene,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \bar{E}_n(t) &\leq M \int_0^T \left(\int_0^L \alpha_1(x) \frac{g_1^2(v_n \bar{\varphi}'_n(x, s))}{v_n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\quad + M \int_0^T \left(\int_0^L \alpha_2(x) \frac{g_2^2(v_n \bar{\psi}'_n(x, s))}{v_n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\quad + M \int_0^T \left(\int_0^L \alpha_3(x) \frac{g_3^2(v_n \bar{\varphi}'_n(x, s))}{v_n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \end{aligned}$$

donde $M > 0$ es una constante que viene de la acotación de $(\bar{\varphi}'_n)$, $(\bar{\psi}'_n)$ y $(\bar{\omega}'_n)$, en $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$. Nuevamente de (4.15) cada término de la derecha de la desigualdad anterior converge a cero cuando va al infinito. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\epsilon^{T-\epsilon} \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}'_n{}^2 + \rho_2 \bar{u}'_n{}^2 + \rho_1 \bar{v}'_n{}^2 dx dt = 0 \quad (4.20)$$

Usando la ecuación (4.17) y del resultado de observabilidad, mostrado en el capítulo anterior, se tiene

$$1 = \epsilon_n(t) = \epsilon_n(0) \leq c_1 \int_\epsilon^{T-\epsilon} \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}'_n{}^2 + \rho_2 \bar{u}'_n{}^2 + \rho_1 \bar{v}'_n{}^2 dx dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $c_1 = c_1(\epsilon, c_0)$. Tomando límite cuando n tiende al infinito en la desigualdad anterior y de la expresión en (4.20) se concluye la contradicción, con lo que la prueba del lema termina. ■

Demostración: Del Teorema (4.1).

Sean los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi &= \{(x, t) \in Q; |\varphi_t(x, t)| > 1\} \quad y \quad \Theta_\varphi = Q \setminus \Pi_\varphi, \\ \Pi_\psi &= \{(x, t) \in Q; |\psi_t(x, t)| > 1\} \quad y \quad \Theta_\psi = Q \setminus \Pi_\psi, \\ \Pi_\omega &= \{(x, t) \in Q; |\omega_t(x, t)| > 1\} \quad y \quad \Theta_\omega = Q \setminus \Pi_\omega, \end{aligned}$$

A seguir, se estimarán cada uno de los tres términos de la expresión (4.7).

$$\int_Q \alpha_1(x) (\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dx dt = \int_{\Pi_\varphi} \alpha_1(x) (\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dx dt + \int_{\Theta_\varphi} \alpha_1(x) (\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dx dt$$

A seguir se analiza cada integral del lado de la derecha. De (2.6) se tiene,

$$\int_{\Pi_\varphi} \alpha_1(x) (\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dx dt \leq (k_1^{-1} + K_1) \int_{\Pi_\varphi} \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t dx dt \quad (4.21)$$

Luego de (4.2) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Theta_\varphi} \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2)dxdt &\leq \int_{\Theta_\varphi} \alpha_1(x)h_1(g_1(\varphi_t)\varphi_t)dxdt \\
&\leq \int_{\Theta_\varphi} (1 + \|\alpha_1\|_\infty)h_1\left(\frac{\alpha_1}{1 + \|\alpha_1\|_\infty}g_1(\varphi_t)\varphi_t\right)dxdt \\
&\leq (1 + \|\alpha_1\|_\infty) \int_{\Theta_\varphi} h_1(\alpha_1(x)g_1(\varphi_t)\varphi_t)dxdt
\end{aligned}$$

de la desigualdad de Jensen:

$$\leq (1 + \|\alpha_1\|_\infty)|Q|h_1\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_1(x)g_1(\varphi_t)\varphi_t dxdt\right) \quad (4.22)$$

Luego, de (4.21) y (4.22) se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_Q \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2)dxdt &\leq (k_1^{-1} + K_1) \int_Q \alpha_1(x)g_1(\varphi_t)\varphi_t dxdt \\
&\quad + (1 + \|\alpha_1\|_\infty)|Q|h_1\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_1(x)g_1(\varphi_t)\varphi_t dxdt\right) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Análogamente, para el segundo término,

$$\begin{aligned}
\int_Q \alpha_2(x)(\psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2)dxdt &\leq (k_2^{-1} + K_2) \int_Q \alpha_2(x)g_2(\psi_t)\psi_t dxdt \\
&\quad + (1 + \|\alpha_2\|_\infty)|Q|h_2\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_2(x)g_2(\psi_t)\psi_t dxdt\right) \quad (4.24)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_Q \alpha_3(x)(\omega_t^2 + g_3(\omega_t)^2)dxdt &\leq (k_3^{-1} + K_3) \int_Q \alpha_3(x)g_3(\omega_t)\omega_t dxdt \\
&\quad + (1 + \|\alpha_3\|_\infty)|Q|h_3\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_3(x)g_3(\omega_t)\omega_t dxdt\right) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Usando (4.7), (4.23) y (4.25) y desde que las funciones h_i son estrictamente crecientes, se obtiene

$$\begin{aligned}
E(T) &\leq \bar{C} \sum_{i=1}^3 (k_i^{-1} + K_i) \int_Q \alpha_i(x)g_i(\varphi_t)\varphi_t + \alpha_i(x)g_i(\psi_t)\psi_t + \alpha_i(x)g_i(\omega_t)\omega_t dxdt \\
&\quad + \bar{C}|Q| \sum_{i=3}^3 (1 + \|\alpha_i\|_\infty)r \left(\int_Q \alpha_i(x)g_i(\varphi_t)\varphi_t + \alpha_i(x)g_i(\psi_t)\psi_t + \alpha_i(x)g_i(\omega_t)\omega_t dxdt \right)
\end{aligned}$$

donde r fue definida en (4.3). Considere

$$M = \frac{1}{\bar{C}|Q| \sum_{i=1}^3 (1 + \|\alpha_i\|_\infty)} \quad y \quad c = \frac{\sum_{i=1}^3 (k_i^{-1} + K_i)}{\sum_{i=1}^3 (1 + \|\alpha_i\|_\infty)}$$

luego

$$\begin{aligned} ME(T) &\leq C \int_Q \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t + \alpha_2(x) g_2(\psi_t) \psi_t + \alpha_3(x) g_3(\omega_t) \omega_t dx dt \\ &\quad + r \left(\int_Q \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t + \alpha_2(x) g_2(\psi_t) \psi_t + \alpha_3(x) g_3(\omega_t) \omega_t dx dt \right) \\ &= (cI + r)(E_0 - E(T)) \end{aligned}$$

Usando (2.11) en la igualdad anterior, se tiene

$$p(E(T)) \leq E_0 - E(T). \quad (4.26)$$

Reemplazando T (respectivamente, 0) en (4.26) con $(m+1)T$ (respectivamente, mT) se obtiene

$$E((m+1)T) + p(E(m+1)T) \leq E(mT), \quad \text{para } m = 0, 1, \dots$$

Usando el Lema (4.2) con $s_m = E(mT)$ se obtiene

$$E(mT) \leq S(m), \quad m = 0, 1, \dots$$

De (4.7), siendo $S(t)$ decreciente y $t = mT + \tau$, donde $\tau \in [0, T]$, resulta que,

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) \leq S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad \text{para } t > T$$

Finalmente como $E(t) \leq S(\frac{t}{T} - 1)$, y ésta es la hipótesis del teorema de la estabilidad, queda verificado que el sistema se estabiliza con una tasa que depende de la función g_i , $i = 1, 2, 3$. escogida. Concluyéndose la demostración del Teorema. ■

4.1. Aplicación

A seguir se ilustra una aplicación del teorema (4.1) para el caso de una disipación lineal en la que se logra, en efecto, una estabilidad de tipo exponencial, i.e.:

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t} E_0$$

donde $C > 0$ y $\gamma > 0$ son constantes positivas, para toda solución que cumpla $E_0 < K$.

Para verificar esta estabilidad se considera la función $g_i(s) = s$, $i = 1, 2, 3$.

En primer lugar, claramente son verificadas las hipótesis dadas en (2.6), para g_i , $i = 1, 2, 3$.

Ahora, de la definición dada en (4.1) al considerar $h_i(s) = 2s$ para $i = 1, 2, 3$, en efecto se verifican:

(i) $h_i(sg_i(s)) = h_i(s^2) = 2s^2 \geq s^2 + g_i^2(s)$ y siendo $h(s) = h_1(s) + h_2(s) + h_3(s)$ luego,

$$h(s) = 6s \quad \text{y} \quad h(0) = 0.$$

(ii) $r(s) = h\left(\frac{s}{|Q|}\right) = \frac{6s}{|Q|}$.

(iii) Para $M = 1$ y $c \in \mathbb{R}$, $p(s) = (cI + r)^{-1}(s)$ y $p(0) = 0$:

$$p(s) = cI(s) + r(s) = cs + \frac{6s}{|Q|} \implies (cI + r)(s) = \left(c + \frac{6}{|Q|}\right)s$$

$$p^{-1}(s) = (cI + r)^{-1}(s) = \left(\frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)s \implies q(s) = s - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}s$$

$$\text{Entonces} \quad q(s) = \left(1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)s.$$

Quedando verificado el Lema (4.1); ahora el siguiente paso es aplicar el Teorema de la Estabilidad dado en (4.1), para tal, estando definidas las funciones p y q se tiene,

$$\left\| \begin{aligned} \frac{d}{dt}S(t) + S(t) + (I + p)^{-1}(S(t)) &= 0 \\ S(0) &= E(0) \end{aligned} \right. \quad (4.27)$$

sin pérdida de generalidad en la segunda restricción para g_i dada en (2.6) se considera $k_i = 1$ y $M = 1$ (recuerde que: $M = \max\{k_i, i = 1, 2, 3\}$)

Entonces (4.27) queda de la siguiente forma

$$\left\| \begin{aligned} \frac{d}{dt}S(t) + \left(1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)S(t) &= 0 \\ S(0) &= E(0) \end{aligned} \right. \quad (4.28)$$

Resolviendo la EDO dada en (4.28) resulta que

$$S(t) = E(0) e^{-\left(1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)t},$$

considere $1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6} > 0 \Leftrightarrow c \geq 1$

Por lo tanto $\forall c \geq 1$, $S(t)$ decae exponencialmente.

Ahora verificando el teorema de la estabilidad, se tiene,

$$\begin{aligned} E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) &= e^{-\left(1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)\left(\frac{t}{T_0} - 1\right)} E(0) \\ &= e^{-\left(1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)\frac{t}{T_0}} e^{\left(\frac{t}{T_0} - 1\right)} E(0) \end{aligned}$$

haciendo $C = e^{\left(1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)}$ y $\gamma = \left(1 - \frac{|Q|}{c|Q| + 6}\right)\frac{1}{T_0}$ se tiene,

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) = C e^{-\gamma t} E(0) \quad \forall \text{ solución del sistema (2.1)-(2.5).}$$

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

El hecho de haber considerado las velocidades de propagación de ondas diferentes (hipótesis coherente desde el punto de vista físico) y condiciones de Dirichlet en las tres ecuaciones, a diferencia de muchos trabajos, ya citados anteriormente, imposibilitaron usar la teoría de semigrupos lineales. Cuando se aborda el estudio de la estabilidad asintótica, las condiciones de Dirichlet obligaron a usar para las estimativas, los resultados de observabilidad que fueron hallados, para luego aplicar el importante resultado de Lasiecka y Trigianni, [16] enmarcado en la teoría de semigrupos no lineales que aquí en esta tesis se aplicó.

Esta metodología usada para el sistema de Bresse nos abre las puertas para el estudio de otros modelos, donde las estimativas de los términos de frontera de tipo Dirichlet sean difíciles de estimar. Un inmediato estudio sería extender el trabajo a dimensiones mayores.

Bibliografía

- [1] Barbu V. **Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces**, Editura Academici Române, Bucuresti, 1974.
- [2] “Brézis H. **Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Universitext, Springer, 600p, XIV, 2011.”
- [3] “Brézis H. **Opérateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert**, North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matematica (50). North-Holland Publishing Co./American Elsevier Publishing Co., Inc., Amsterdam-London/New York, 1973.”
- [4] “Cavalcanti M.; Domingos V.; Soriano J. **Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**, DMA - UEM, Maringa, Brasil, 2015.”
- [5] “Cavalcanti M. ; Domingos V. ; Soriano J. **Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term. Contributions to nonlinear analysis**. Progress in Nonlinear Differential Equations Applications, 66, Birkhäuser, Basel, 2006.”
- [6] “Cavalcanti M. ; Domingos V. ; Lasiecka I. **Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping source interaction**. Journal of Differential Equations, 236, no. 2, 407-459, 2007.”
- [7] “Charles W., Soriano J., Falcão F. y Rodrigues J. **Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping**. Journal of Differential Equations, 255 (2013) 2267-2290.”

- [8] “Evans L. **Partial differential equations**. American Mathematical Society. Vol 19. (1994).”
- [9] Fatori L. ; Monteiro N. **The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system**. Appl. Math. Lett., 25, no. 3, 600-604, 2012.
- [10] “Fatori L. ; Muñoz J. **Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system**. IMA Journal of Applied Mathematics, 75, 881-904, 2010.”
- [11] Gomes A. **Semigrupos Não Lineares e Equações Diferenciais nos Espaços de Banach**, Textos Matematicos do IM-UFRJ, UFRJ, 2003.
- [12] Jaramillo J. **Análisis Clásico de Estructuras**, Univ. Nacional de Colombia Primera edición 2004. Bogotá Colombia. Pág. 276. Unibiblos. ISBN 958-701-392-1.
- [13] Kreyszig E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Wiley Classics Library, 1989.
- [14] “Lagnese J.; Leugering G.; Schmidt E. **Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures, Systems & Control: Foundations & Applications**. Birkhäuser Boston Inc, Boston, MA, 1994.”
- [15] “Lasiecka I. **Mathematical Control Theory of Coupled PDE’s**, CBMS-NSF Lecture Notes SIAM, 2002.”
- [16] “Lasiecka I.; Tataru D. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping**, Differential and Integral Equations, 6, 507-533, 1993.”
- [17] Liu Z.; Rao B. **Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system**. Z. Angew. Math. Phys. 60 (2009) 5469.
- [18] Massa J.; Giró J.; Giudici A. **Compendio de cálculo estructural para ingeniería mecánica y aeronáutica**, Universidad Nacional de Córdoba. Primera Edición 2017. España. Pág. 448.
- [19] Ma San J. **Diseño de elementos de máquinas I** , Universidad Nacional de Piura. Primera Edición 2013. Piura Perú. Pág. 158. Eumed.net.

- [20] “Soriano P. J.; Rivera M. J.; Fatori H. L. **Bresse System with indefinite damping.** J. Math. Anal. Appl. Vol. 387, (1), 284290, (2012). “
- [21] “Soriano J.; Schulz. **Exact controllability for Bresse system with variable coefficients.** J. Math. Meth. Appl. Sciences. Vol.38, Issue 18, pages 4949-4966, (2015). ”